代幾 I 演習 (2008/11/13)

問題 197　行列 A がエルミート行列[1] の時、$E+iA, E-iA$ が何れも正則行列であることを示せ。

問題 198　演習書の p.74 の 5 章の類題 3 を解きなさい。

問題 199　演習書の p.75 の 5 章の類題 4 を解きなさい。

問題 200　演習書の p.76 の 5 章の類題 5 を解きなさい。

問題 201

共に零ベクトルではない、二つの三次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を取り、その二つのベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}$ とする時、次の問いに答えなさい。

1. $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{c}|^2$ を示せ。
2. もし、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するならば、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をそれぞれ自分自身の長さで割ったベクトルを要素とする行列 $A = \left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}, \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} \right)$ は直交行列であることを示せ。

問題 202　演習書の p.78 の 5 章の類題 6 を解きなさい。

問題 203　演習書の p.80 の 5 章の類題 7 を解きなさい。

問題 204　次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

問題 205　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.8 を解きなさい。

問題 206　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.10 を解きなさい。

問題 207　次の等式を証明せよ。

1. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[1] 行列 A がエルミート行列であることの定義は、行列 A が $A = A^*$ を満すことを言う。ただし、$A^* = \overline{{}^t A}$ である。

問題 208　演習書の p.33 の 類題 9 を解きなさい。

問題 209　演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.2 を解きなさい。

問題 210　A を 3 次行列とする。このとき次の行列の行列式の値を $|A|$ を用いて表わせ。

$$1.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 2.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3.\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}A,\quad 4.\quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5.\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 211　演習書の p.34 の 2 章の問題の 2.3 を解きなさい。

問題 212　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.4 を解きなさい。

問題 213　演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

問題 214　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.
2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)
3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 215

1. 行列 X が実対称行列、Y が実交代行列の時、$A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。
2. 逆に、複素行列 A が、エルミート行列であれば、ある実対称行列 X と実交代行列 Y が存在し、$A = X + iY$ と一意に表すことができることを示せ。

問題 216　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.5 を解きなさい。

問題 217　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.6 を解きなさい。

問題 218

1. 行列 A がエルミート行列の時、$U = (E - iA)(E + iA)^{-1}$ で定義される行列 U は、ユニタリー行列[2] で、かつ $|E + U| \neq 0$ であることを示せ。

2. 行列 U が $|E + U| \neq 0$ を満す、ユニタリー行列の時、$A = i(U + E)^{-1}(U - E)$ で定義される行列 A がエルミート行列であることを示せ。

問題 219　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.7 を解きなさい。

問題 220　演習書の p.61 の 類題 2 を解きなさい。

問題 221　行列 A, B が共にエルミート行列ならば、次の行列もまた、エルミート行列になるということを示せ。
1. $A + B$,　2. $AB + BA$,　3. $i(AB - BA)$

問題 222　演習書の p.62 の 類題 3 を解きなさい。

問題 223　演習書の p.63 の 類題 4 を解きなさい。

問題 224　$A_1, A_2, .., A_n$ がエルミート行列の時、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = O$ ならば、実は、$A_i = O(i = 1, 2, .., n)$ であることを示せ。

問題 225　演習書の p.64 の 類題 5 を解きなさい。

問題 226　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.2 を解きなさい。

問題 227　A がエルミート行列ならば、$|A|$ は実数であることを示せ。

問題 228　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.3 を解きなさい。

問題 229　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.4 を解きなさい。

問題 230　A がエルミート行列, B が正則行列ならば、B^*AB もエルミート行列になることを示せ。

問題 231　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.5 を解きなさい。

問題 232　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.6 を解きなさい。

[2]行列 A がユニタリー行列であることの定義は、行列 A が $A^* = A^{-1}$ を満すことを言う。

問題 233　次の行列の Rank（階数）を求めなさい。

1. $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$,　3. $\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 234　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.7 を解きなさい。

問題 235　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.9 を解きなさい。

問題 236　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. 四つの変数 x, a, b, c に関するヴァン=デルモント行列式[3]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta(x, a, b, c)$$

が、三つの変数 a, b, c に関する差積 $\Delta(a, b, c)$ と、x に関する三次の多項式 $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ を用いて、$\Delta(x, a, b, c) = \Delta(a, b, c) f(x)$ と表現できることを示せ。また、この時、係数 α, β, γ を変数 a, b, c を用いて表せ。

2. 同じく、前問の行列式の 1 列目に関する行列式の展開[4]を求めよ

3. 前の二つの問題の結果を用いて、冒頭の行列式の値を、三つの変数 a, b, c の式と差積 $\Delta(a, b, c)$ の積の形で表したものを求めよ。

4. 同様にして行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

の値を求めよ。

[3]Text p.82 参照。
[4]Text p.85 参照