# 代幾 I 演習 (2008/11/27)

【内積の定義】$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 $V$ の二つの要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対応して、複素数 $\boldsymbol{C}$ の要素 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を対応させる演算子 $(\_, \_)$ が、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, c \in \boldsymbol{C}$ に対して、次の性質を満す時に、この演算子 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を**内積** と呼ぶ[1]。

1. $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
2. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$
4. $\boldsymbol{x} \neq 0 \rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$
5. $\exists \boldsymbol{x}_0 \in V s.t. (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) > 0$

**問題 237** $(\_, \_)$ が、上記の定義に従った内積なら、次の性質を満すこと示せ。

1. $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \bar{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$
3. $(\boldsymbol{x}, 0) = 0$
4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$

**問題 238** $(\_, \_)$ が、内積なら、上記の定義に従った内積なら、更に次の性質を満すこと示せ。ただし、証明には、上記の内積の定義の他に、前問の結果を用いても良い。

1. $x$ が $x_0$ と平行でない場合、関数 $\phi(t) = (t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0)$ が、実数上の連続関数である事を示しなさい。
2. 上記の $\phi(t)$ は、区間 $[0, 1]$ で 0 にならないこと示せ (ヒント:ベクトル $\boldsymbol{x}_t t = \boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0$ は、$t = 0$ の時 $\boldsymbol{x}_0$ に等しく、 $t = 1$ の時 $\boldsymbol{x}$ に等しい。$t$ が区間 $[0, 1]$ に入る間、$\boldsymbol{x}_t$ は、$\boldsymbol{0}$ になることはないので..)。
3. $x \neq 0 \rightarrow (x, x) > 0$ (ヒント:まず、$x$ が $x_0$ に平行な場合とそうでない場合に分けて考える。更に平行でない場合は、前問の関数が、$t = 0$ の時、正値 $(x_0, x_0)$ であり $t = 1$ の時に $(x, x)$ となるが、この間に 0 になることはないことを利用して...)。

[1] この条件は、教科書 p.61 の定理 [6.1] より限定されている。しかし、以下の問題にあるように、この条件から定理 [6.1] の性質は全て導くことができる。

**問題 239**　次の行列が逆行列を持つための $\alpha$ の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**問題 240**　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.7 を解きなさい。

**問題 241**　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.1 を解きなさい。

**問題 242**　自然数 $n, m$ は、$n > m$ を満すとし、$A$ を $(n, m)$ 行列、$B$ を $(m, n)$ 行列とする。この時、二つの行列の積 $AB$ ( これは、$n$ 次の正方行列になることに注意 ) の行列式 $|AB|$ は常に 0 になることを示せ。(ヒント：$A$ に、全ての要素が 0 の行を下に $(n-m)$ 行追加した行列 $A'$ と、$B$ に、全ての要素が 0 の列を右に $(n-m)$ 列追加した行列 $B'$ の、共に $n$ 次の行列を作り、その積 $A'B'$ を計算すると.. )

**問題 243**　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

**問題 244**　演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

**問題 245**　次の行列 $A$ について以下の問い答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. $B$ を次のような行列とする時、$A = B({}^tB)$ であることを示せ。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

2. 行列式 $|A|$ の値を、三つの変数 $a, b, c$ の差積 $\Delta(a, b, c)$ を用いて表せ。

**問題 246**　次の行列式を因数分解しなさい。

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$