代幾 I 演習 (2008/12/04)

問題 247　A を (m,n) 型の複素行列とする。この時、C^n から C^m への写像 $T_A : C^n \longrightarrow C^m$ を、$T_A(x) = Ax\,(\forall x \in C^n)$ で定義するとき、この写像 T_A は、C^n から C^m への**線型写像**になっていることを示せ。

問題 248　演習書の p.81 の 5 章の類題 8 を解きなさい。

問題 249　演習書の p.81 の 5 章の類題 9 を解きなさい。

問題 250　n 次の正方行列 A が確率行列[1] で、n 次の縦ベクトル $\vec{p}$ が確率ベクトル[2] の時、$A\vec{p}$ もまた、確率ベクトルになること示せ。

問題 251

8 つの部屋 (1 から 8 の数字が振られている) があり、その何れかの部屋に人がいるとする (下の例では、現在 5 番目の部屋に人がいる)。

1	2	3	4	5	6	7	8
				○			

一日に一度、コイン[3]を投げ、表が出れば左の部屋へ、裏が出れば右の部屋に移るとする。ただし、移動先がない場合[4]は、その部屋に留まるとする。

この時、次の問いに答えなさい。

1. 本日、i 番目の部屋にいる確率を $\vec{p} = (p_i)$、次の日に i 番目の部屋にいる確率を $\vec{q} = (q_i)$ とした時 $\vec{q} = A\vec{p}$ となるような行列 A を求めなさい。

2. 初日は、1 番目の部屋にいた (即ち $\vec{p_1} = (p_{1i})$ の時、$p_{11} = 1, p_{1i} = 0 (i = 2,..,8)$ となる) とすると、4 日目 (即ち、3 度コインを投げる) に、再び、部屋 1 に居る確率を求めなさい。

3. A^n を求めなさい。

4. $\vec{p_0}$ を確率ベクトルとし、確率ベクトルの列 $\{\vec{p_n}\}$ を、 $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p_n}$ で定義すると、最初の確率ベクトル $\vec{p_0}$ に拘らず、このベクトル列が収束することを示しなさい。

問題 252　演習書の p.67 の 4 章の問題 4.8 を解きなさい。

---

[1]行列 $A = (a_{ij})$ が確率行列であることの定義は、その成分が非負で、しかも、その全ての行において、成分の和が 1 になること、即ち $a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\,(i = 1..n)$ であることを言う。(cf. 教科書 p.73)

[2]$\vec{p} = (p_i)$ が確率ベクトルであることの定義は、その成分が、全て非負で、かつ、その和が 1 となることである。即ち、$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ の場合を言う。

[3]このコインは、歪んでおらず、投げると正確に $\frac{1}{2}$ の確率で表かあるいは裏のどちらかが出るとする。

[4]1 番目の部屋で表が出た場合と、8 番目の部屋で裏が出た場合

問題 253

A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人は、それぞれ自分のホームページを作成し、互いに見せあって、自慢することにした。そして、もし、自分以外の人のホームページを見て、これは面白いと思ったならば、自分のページにその面白いと思ったページへのリンクを作成することにした。

暫くして、各自のホームページも作成され、内容の評価が済み、その結果として、次のようなリンクが行われた (A 君は E 君以外の三人のページにリンクをはったが A 君のページにリンクをしたのは E 君だけだった)。

リンク元＼リンク先	A	B	C	D	E
A		○	○	○	
B			○		○
C		○			○
D			○		○
E	○				

その後、5 人は、誰のページが一番良いかを議論することになった。その結果、次のような結論[5] になった。

- もし、そのページが価値があるならば、他の人からリンクされているに違いない (リンクされているページは評価が高い)。
- そのリンクの価値は、リンク元の価値に比例するに違いない (価値のあるページからリンクされるページは評価が高い)。
- そのリンクは価値は、リンク元のリンク量に反比例するに違いない (できるだけ価値のあるページだけをリンクする)。

この結論を、5 人のホームページの評価を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ととして、関係式で表現すると次のようになった。

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{1}x_5 \\
x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\
x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_4 = \frac{1}{3}x_1 \\
x_5 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4
\end{cases}
$$

この時、次の問いに答えなさい。

1. 縦ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ を考え、上記の関係式を行列とベクトルを用いて表すと、$\vec{x} = A\vec{x}$ となる。このような行列 A を求めなさい。
2. A^n を求めなさい。
3. $x_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ とし、$x_{n+1} = Ax_n$ とすると、$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ が収束することを示しなさい。
4. x_∞ は、$x_\infty = Ax_\infty$ を満すことを示しなさい。
5. この評価法で、 A 君から E 君の内、一番評価が高いのは誰のページか。

[5] Google の人気の秘密 (`http://www.google.co.jp/intl/ja/why_use.html`)

問題 254　$f(x) = a\cos x + b\sin x$ という形をした関数全体の集合を $F(=\{a\cos x + b\sin x | a, b \in R\})$, 二次元の実ベクトルの集合を $V(=\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、f を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. $f(x) = a\cos x + b\sin x \in F$ に対して、二次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
4. V 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
5. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある 2×2 の実行列 A_D があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 A_S があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。
7. A_S は、A_D 逆行列であることを示せ。
8. 上記の性質を利用して、F 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x$ の解の内、F に含まれるものを求めよ。
9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。

問題 255　(m, n) 型の行列 A, B に対して、$PAQ = B$ を満す、正則な行列 P, Q (ただし、P は、n 次の正方行列で、Q は、m 次の正方行列となる) が存在する時に、$A \sim B$ で表し、A と B は、同値であると呼ぶことにする。この時、次の三つが成立することを示せ。

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

問題 256　$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) \Leftrightarrow A \sim B$ を示せ。

問題 257　$f(x)=a\cos x+b\sin x+ce^{-x}$ という形をした関数全体の集合を $F(=\{a\cos x+b\sin x+ce^{-x}|a,b,c\in R\})$, 三次元の実ベクトルの集合を $V(=\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}|a,b,c\in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x)\in F$ ならば、f を微分した $f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f)=f'$ は、全単射であることを示せ。
3. $f(x)=a\cos x+b\sin x+ce^{-1}\in F$ に対して、三次元ベクトル $v=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in V$ を対応させる写像 $v=\varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
4. V 上の変換 $\bar{D}(v)=\varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
5. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある 3×3 の実行列 A_D があり、$\bar{D}(v)=A_Dv$ と表現できることを示せ。
6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S}=\varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 A_S があり、$S(v)=A_Sv$ となることを示せ。
7. A_S は、A_D 逆行列であることを示せ。
8. 上記の性質を利用して、F 上の微分方程式 $f'(x)=\cos x+\sin x+e^{-x}$ の解の内、F に含まれるものを求めよ。
9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x)+2f'(x)=\cos x+e^{-x}$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。

問題 258　二つの多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, g(x)=px^2+qx+r$ に対して、次の行列式 $R(f,g)$ をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が同じ根を持つこと」と、「$R(f,g)=0$ が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。