代幾 I 小テスト [問題] (2008/05/15)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1
以下のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、次の問に答えなさい。

1. 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を計算しなさい。
2. ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ $||\boldsymbol{a}||$ を計算しなさい。
3. 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を計算しなさい。
4. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の交角を θ とした時に、その余弦 $\cos\theta$ を求めなさい。
5. $\boldsymbol{c}$ を、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合で表しなさい。

1.
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -15 \\ -12 \\ -60 \end{pmatrix}$$

問題 2 次の二点を通る直線の式を求めなさい

Q.1
$$(-5, 1), (1, -4)$$

Q.2
$$(3, -7), (-4, -6)$$

Q.3
$$(2, -3), (1, 3)$$

Q.4
$$(-1, 8), (0, -3)$$

問題 3 次の点と直線の間の距離を求めなさい

Q.1
$$(3, -5), \quad 5x + 3y = -1$$

Q.2
$$(0, 2), \quad 2x = -5$$

Q.3
$$(-3, 2), \quad 2x - 2y = -1$$

Q.4
$$(-1, 1), \quad 4x + 3y = -2$$

問題 4　次の複素数は実数であることを示せ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}$,　2. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$,　3. $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$.

問題 5

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ。
2. 複素数 $\alpha\neq 0$ が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha=-\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 6　複素数の演算 (和・積) の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\gamma=e+fi$ $(a,b,c,d,e,f\in\boldsymbol{R})$ に対し、次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いたかも示せ。

1. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (加法についての結合法則)
2. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (加法についての交換法則)
3. $\alpha+0=\alpha$ (加法についての単位元)
4. $\alpha+(-1)\alpha=0$ (加法についての逆元の存在)
5. $\alpha\beta=\beta\alpha$ (乗法についての交換法則)
6. $\alpha\cdot 1=\alpha$ (乗法についての単位元の存在)
7. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (分配法則)
8. $\alpha\delta=1$ となる複素数 δ が存在する。(ただし、$\alpha\neq 0$ の時) (乗法の逆元の存在)

代幾 I 小テスト [解答] (2008/05/15)

問題 1

以下のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、次の問に答えなさい。

1. 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を計算しなさい。
2. ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ $||\boldsymbol{a}||$ を計算しなさい。
3. 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を計算しなさい。
4. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の交角を θ とした時に、その余弦 $\cos\theta$ を求めなさい。
5. $\boldsymbol{c}$ を、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合で表しなさい。

1.

$$1.\quad \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 2.\quad 5, \quad 3.\quad 6, \quad 4.\quad \frac{6\sqrt{29}}{145}, \quad 5.\quad 2\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$1.\quad \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2.\quad \sqrt{59}, \quad 3.\quad 3, \quad 4.\quad \frac{\sqrt{59}}{177}, \quad 5.\quad 6\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

問題 2　次の二点を通る直線の式を求めなさい

A.1

$$5x+6y=-19$$

A.2

$$x+7y=-46$$

A.3

$$6x+y=9$$

A.4

$$11x+y=-3$$

問題 3　次の点と直線の間の距離を求めなさい

A.1

$$\frac{\sqrt{34}}{34}$$

A.2

$$\frac{5}{2}$$

A.3

$$\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

A.4

$$\frac{1}{5}$$

問題 4

Q. 次の複素数は実数であることを示せ。

$$1.\quad \alpha+\overline{\alpha},\quad 2.\quad \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta,\quad 3.\quad (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}).$$

A. $\alpha=a+bi, \beta=c+di$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ とする。すると、$\overline{\alpha}=a-bi, \overline{\beta}=c-di$ となる。

1.

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \alpha+\overline{\alpha} \\
&= (a+bi)+(a-bi) \\
&= (a+bi)+(a+(-b)i) \\
&= (a+a)+(b+(-b))i \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= 2a+0i \\
&= 2a
\end{aligned}$$

仮定より $a\in\boldsymbol{R}$、一方 $2\in\boldsymbol{R}$ であり、$\boldsymbol{R}$ は積に関して閉じている。よって、与式 $=2a\in\boldsymbol{R}$ となる。

2. **(解)**

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta \\
&= (a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di) \\
&= \{(ac+bd)+(bc-ad)i\}+\{(ac+bd)+(-bc+ad)i\} \quad (\text{複素数の積の定義}) \\
&= 2(ac+bd)
\end{aligned}$$

仮定より $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$、であり、$\boldsymbol{R}$ は積と和に関して閉じている。よって、与式 $=2(ac+bd)\in\boldsymbol{R}$ となる。

(別解) $\overline{(\alpha\overline{\beta})}=\overline{\alpha}\overline{(\overline{\beta})}=\overline{\alpha}\beta$ であるので、$X=\alpha\overline{\beta}$ とすれば、与式 $=X+\overline{X}$ である。これは、前問より実数となる。

3. **(解)**

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \\
&= \{(a+bi)+(c+di)\}\{(a-bi)+(c-di)\} \\
&= \{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\} \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= \{(a+c)^2+(b+d)^2\}+0i \quad (\text{複素数の積の定義}) \\
&= (a+c)^2+(b+d)^2
\end{aligned}$$

仮定より $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$、であり、$\boldsymbol{R}$ は積と和に関して閉じている。よって、与式 $=(a+c)^2+(b+d)^2\in\boldsymbol{R}$ となる。

(別解) $z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ の時、一般に、$z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \boldsymbol{R}$ である。一方、$\overline{(\alpha+\beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ である。したがって、$X = \alpha + \beta$ とすれば、与式 $= X\overline{X}$ である。これは上記の事実より実数である。

問題 5

1. **Q.** 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha = \overline{\alpha}$ であることを示せ。

   A. $\alpha = a + bi(a, b \in \boldsymbol{R})$ とする。

   ($\Longrightarrow$) α が実数であれば、$b = 0$ となる、従って、$\alpha = a + bi = a + 0i = a$ 一方、$\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi = a - 0i = a$ よって、$\alpha = \overline{\alpha}$。

   ($\Longleftarrow$) $\alpha = \overline{\alpha}$ より、$a + bi = \overline{a + bi} = a - bi$。これを整理して $2bi = 0$ より、$b = 0$。よって、α は実数。

2. **Q.** 複素数 $\alpha \neq 0$ が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha = -\overline{\alpha}$ であることを示せ。

   A. $\alpha = a + bi(a, b \in \boldsymbol{R})$ とする。

   ($\Longrightarrow$) α が純虚数であれば、$a = 0(b \neq 0)$ となる、従って、$\alpha = a + bi = 0 + bi = bi$ 一方、$\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi = 0 - bi = -bi$ よって、$\alpha = -\overline{\alpha}$。

   ($\Longleftarrow$) $\alpha = \overline{\alpha}$ より、$a + bi = -\overline{a + bi} = -a + bi$。これを整理して $2a = 0$ より、$a = 0$。 仮定より $b \neq 0$ なので、α は純虚数。

問題 6 複素数の演算 (和・積) の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di,\ \gamma = e + fi$ $(a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R})$ に対し、次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いたかも示せ。

1. **Q.** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (加法についての結合法則)

   A.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\alpha + \beta) + \gamma \\
&= \{(a + bi) + (c + di)\} + (e + fi) \\
&= \{(a + c) + (b + d)i\} + (e + fi) \quad \text{(複素数の和の定義)} \\
&= \{(a + c) + e\} + \{(b + d) + f\}i \quad \text{(複素数の和の定義)} \\
&= \{a + (c + e)\} + \{b + (d + f)\}i \quad \text{(実数の和の結合法則)} \\
&= (a + bi) + \{(c + e) + (d + f)i\} \quad \text{(複素数の和の定義)} \\
&= (a + bi) + \{(c + di) + (e + fi)\} \quad \text{(複素数の和の定義)} \\
&= \alpha + (\beta + \gamma) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

   よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

したがって、与えられた等式は成立する。

2. **Q.** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (加法についての交換法則)

   A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha+\beta \\
&= (a+bi)+(c+di) \\
&= (a+c)+(b+d)i \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= (c+a)+(d+b)i \quad (\text{実数の和の交換法則}) \\
&= (c+di)+(a+bi) \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= \beta+\alpha \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

3. **Q.** $\alpha+0=\alpha$ (加法についての単位元)

   A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha+0 \\
&= (a+bi)+(0+0i) \quad (\text{実数と複素数の関係}) \\
&= (a+0)+(b+0)i \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= a+bi \quad (\text{実数の単位元 } 0 \text{ の性質}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

4. **Q.** $\alpha+(-1)\alpha=0$ (加法についての逆元の存在)

   A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha+(-1)\alpha \\
&= (a+bi)+\{-a+(-b)i\} \quad (\text{複素数における } - \text{ の定義}) \\
&= \{a+(-a)\}+\{b+(-b)\}i \quad (\text{複素数の和の定義}) \\
&= 0+0i \quad (\text{実数における和の逆元の定義}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

5. **Q.** $\alpha\beta = \beta\alpha$ (乗法についての交換法則)

A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha\beta \\
&= (a+bi)(c+di) \\
&= (ac-bd)+(bc+ad)i \quad &\text{(複素数の積の定義)} \\
&= (ca-db)+(cb+da)i \quad &\text{(実数の積の交換法則)} \\
&= (c+di)(a+bi) \quad &\text{(複素数の積の定義)} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

6. **Q.** $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (乗法についての単位元の存在)

A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha \cdot 1 \\
&= (a+bi)(1+0i) \\
&= (a\cdot 1 - b\cdot 0)+(a\cdot 0 + b\cdot 1)i \quad &\text{(複素数の積の定義)} \\
&= a+bi \quad &\text{(実数の } 0,1 \text{ の性質)} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

7. **Q.** $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (分配法則)

A.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha(\beta+\gamma) \\
&= (a+bi)\{(c+di)+(e+fi)\} \\
&= (a+bi)\{(c+e)+(d+f)i\} \quad &\text{(複素数の和の定義)} \\
&= \{a(c+e)-b(d+f)\}+\{a(d+f)+b(c+e)\}i \quad &\text{(複素数の積の定義)} \\
&= \{ac+ae-bd-bf\}+\{ad+af+bc+be\}i \quad &\text{(実数の分配法則)} \\
&= \{(ac-bd)+(ae-bf)\}+\{(ad+bc)+(af+be)\}i \quad &\text{(実数の和の交換・結合法則)} \\
&= \{(ac-bd)+(ad+bc)i\}+\{(ae-bf)+(af+be)i\} \quad &\text{(複素数の和の定義)} \\
&= \{(a+bi)(c+di)\}+\{(a+bi)(f+ei)\} \quad &\text{(複素数の積の定義)} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

8. **Q.** $\alpha\delta = 1$ となる複素数 δ が存在する。(ただし、$\alpha \neq 0$ の時) (乗法の逆元の存在)

A. 仮定より、$\alpha \neq 0$ なので、$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 \neq 0$。よって、$\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \in \boldsymbol{R}$ である。これより、$\delta = \frac{a}{a^2+b^2} + (-\frac{b}{a^2+b^2})i$ と置けば、$\delta \in \boldsymbol{C}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
\alpha\delta &= (a+bi)(\tfrac{a}{a^2+b^2} + (-\tfrac{b}{a^2+b^2})i) \\
&= (a\tfrac{a}{a^2+b^2} + b\tfrac{b}{a^2+b^2})) + (b\tfrac{a}{a^2+b^2} - a\tfrac{b}{a^2+b^2})i \quad \text{(複素数の積の定義)} \\
&= \tfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \tfrac{ba-ab}{a^2+b^2}i \\
&= 1 + 0i \\
&= 1
\end{aligned}$$

である。すなわち、$\alpha\delta = 1$ となる δ が $\boldsymbol{C}$ 内に存在する。