代幾 I 小テスト [問題] (2008/06/12)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1

次の三点を通る平面の式を求めなさい

Q.1

$$(-8,-6,-7),\ (3,-6,-4),\ (-6,9,6)$$

Q.2

$$(-8,1,3),\quad (-9,3,6),\quad (-9,5,-5)$$

Q.3

$$(3,-8,-8),\quad (-4,5,-7),\quad (3,8,6)$$

問題 2

次の行列の行列式を求めなさい

Q.1

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Q.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

問題 3

次の平面ベクトル v への射影子行列を求めなさい

Q.1

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

問題 4

複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\mathrm{Re}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{Re}(\alpha) \pm \mathrm{Re}(\beta)$
2. $\mathrm{I}m(\alpha \pm \beta) = \mathrm{I}m(\alpha) \pm \mathrm{I}m(\beta)$

問題 5　複素数 α_1, α_2 がそれぞれ、極形式

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\ \alpha_2 &= r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \end{aligned}$$

で表されているとする。この時、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\alpha_1/\alpha_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
2. $\alpha_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))\,(n \in \boldsymbol{N})$

問題 6　座標平面上の直線 $y = mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. m を θ を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 直線 $y = mx$ に関し線対称移動した点の座標を x, y, m を用いて表せ。

代幾 I 小テスト [解答] (2008/06/12)

問題 1

次の三点を通る平面の式を求めなさい

A.1

$$45x + 137y - 165z = -27$$

A.2

$$28x + 11y + 2z = -207$$

A.3

$$83x + 49y - 56z = 305$$

問題 2

次の行列の行列式を求めなさい

A.1

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

A.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

A.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

問題 3

次の平面ベクトル v への射影子行列を求めなさい

A.1

$$\begin{pmatrix} \frac{81}{85} & -\frac{18}{85} \\ -\frac{18}{85} & \frac{4}{85} \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{29} & \frac{10}{29} \\ \frac{10}{29} & \frac{25}{29} \end{pmatrix}$$

問題 4

複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. **Q.** $\mathrm{R}e(\alpha \pm \beta) = \mathrm{R}e(\alpha) \pm \mathrm{R}e(\beta)$

   A. $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di\,(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathrm{R}e(\alpha \pm \beta) \\
&= \mathrm{R}e((a+bi) \pm (c+di)) \\
&= \mathrm{R}e((a \pm c) + (b \pm d)i) \\
&= a \pm c
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \mathrm{R}e(\alpha) \pm \mathrm{R}e(\beta) \\
&= \mathrm{R}e(a+bi) \pm \mathrm{R}e(c+di) \\
&= a \pm c
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

2. **Q.** $\mathrm{I}m(\alpha \pm \beta) = \mathrm{I}m(\alpha) \pm \mathrm{I}m(\beta)$

   A. $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di\,(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathrm{I}m(\alpha \pm \beta) \\
&= \mathrm{I}m((a+bi) \pm (c+di)) \\
&= \mathrm{I}m((a \pm c) + (b \pm d)i) \\
&= b \pm d
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \mathrm{I}m(\alpha) \pm \mathrm{I}m(\beta) \\
&= \mathrm{I}m(a+bi) \pm \mathrm{I}m(c+di) \\
&= b \pm d
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 5　複素数 α_1, α_2 がそれぞれ、極形式

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\
\alpha_2 &= r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))
\end{aligned}$$

で表されているとする。この時、次の等式が成立することを示しなさい。

1. **Q.** $\alpha_1/\alpha_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$

   A.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\
&= \frac{r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2)-i\sin(\theta_2))}{(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))(\cos(\theta_2)-i\sin(\theta_2))} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))+i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1)\sin(\theta_2))}{\cos^2(\theta_2)+\sin^2(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\theta_1)\cos(-\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(-\theta_2))+i(\sin(\theta_1)\cos(-\theta_2)+\cos(\theta_1)\sin(-\theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

   よって、与えられた等式は成立する。

2. **Q.** $\alpha_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1)+i\sin(n\theta_1))\ (n\in\boldsymbol{N})$

   A. n に関する帰納法による。

   ($n=1$ **の時**)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\alpha_1)^1 \\
&= \alpha_1 \\
&= r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)) \\
&= (r_1)^1(\cos(1\cdot\theta_1)+i\sin(1\cdot\theta_1)) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

   よって、成立する。

   ($n=k$ **の時成立するとして、**$n=k+1$ **の時**)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \alpha_1^{k+1} \\
&= \alpha_1^k\alpha_1 \\
&= (r_1^k(\cos(k\theta_1)+i\sin(k\theta_1)))(r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))) \\
&= r_1^{k+1}((\cos(k\cdot\theta_1)\cos(\theta_1)-\sin(k\cdot\theta_1)\sin(\theta_1))+i(\sin(k\cdot\theta_1)\cos(\theta_1)+\sin(\theta_1)\cos(k\cdot\theta_1))) \\
&= r_1^{k+1}(\cos((k+1)\cdot\theta_1)+i\sin((k+1)\cdot\theta_1)) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

   よって、成立する。

以上により、$n=1$ 時並びに、$n=k$ 時成立するとして、$n=k+1$ の場合も成立することの両方が成立したので、帰納法により、任意の自然数 n に関して、上記の等式は成立する。

問題 6　座標平面上の直線 $y=mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. **Q.** m を θ を用いて表せ。

   A. 直線 $y=mx$ 上の点 $P(x_0,mx_0),\ (x_0\neq 0)$ と、原点 O 並びに、P_0 から x 軸に下ろした垂線の足を $H(x_0,0)$ が作る直角三角形を考えると $\tan\theta=\frac{PH}{OH}=\frac{mx_o}{x_0}=m$ となる。すなわち、$m=\tan\theta$ が答である。

2. **Q.** 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y=mx$ に関し線対称移動した点の座標を x,y,m を用いて表せ。

   A. 平面上の点 $P(x,y)$ を、$y=mx$ 線対称移動した点を $P'(x',y')$ とすると、対称移動の性質から次のような条件が成立する。

   (a) 点 P,P' の中点は、直線 $y=mx$ 上にある。
   (b) 線分 PP' と 直線 $y=mx$ は直交する。

   この二つの条件からそれぞれ式を立てると、次のようになる。

   $$\begin{aligned}(1)\qquad \frac{y+y'}{2} &= m\frac{x+x'}{2}\\ (2)\qquad \frac{y-y'}{x-x'}\times m &= -1\end{aligned}$$

   この連立方程式を、x',y' について解くと次のようになる。

   $$\begin{cases} x' = \frac{2m}{m^2+1}y-\frac{m^2-1}{m^2+1}x \\ y' = \frac{m^2-1}{m^2+1}y+\frac{2m}{m^2+1}x \end{cases}$$