代幾 I 小テスト [問題] (2008/07/17)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1

実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 2　実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$\mid \alpha \mid\mid \beta \mid = \mid \alpha\beta \mid$$

をもちいて導け。

問題 3　n 次の正方行列 A, B において、$AB = BA$ が成立する時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

問題 4

次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 5

次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 6

次の点と平面の間の距離を求めなさい

Q.1

$$(-4, -5, 5), \quad 4x - 5y - 2z = 0$$

Q.2

$$(-5, -1, -4), \quad 3x - 2y - 4z = 5$$

Q.3

$$(0, 0, 5), \quad 2y - 2z = 1$$

代幾 I 小テスト [解答] (2008/07/17)

問題 1

Q. 実係数の 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が虚根 $a+bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

A. $a+bi$ が $x^3+px+q=0$ の根なので、これを x に代入すると次のような式が成立する。

$$\begin{aligned}(a+bi)^3+p(a+bi)+q &= ((a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i)+p(a+bi)+q \\ &= (a^3-3ab^2+pa+q)+(3a^2b-b^3+b)i \\ &= 0\end{aligned}$$

これより、次の二つの等式 (式 1) が成立する。

$$(\text{式 }1)\begin{cases} a^3-3ab^2+pa+q = 0 \\ 3a^2b-b^3+b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(a-bi)^3+p(a-bi)+q &= ((a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i)+p(a-bi)+q \\ &= (a^3-3ab^2+pa+q)-(3a^2b-b^3+b)i \\ &\quad \text{ところが、先の (式 1) の二つの等式を代入すると..} \\ &= 0-0i \\ &= 0\end{aligned}$$

すなわち、$a-bi$ も、この方程式の根である。残る三つ目の根を α とすれば、根と係数関係より、

$$(a+bi)+(a-bi)+\alpha=0$$

よって、

$$\alpha=-2a$$

すなわち、$-2a$ もこの方程式の根となる。

問題 2

Q. 実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を複素数 $\alpha,\ \beta$ についての等式

$$\mid \alpha \mid\mid \beta \mid=\mid \alpha\beta \mid$$

をもちいて導け。

A. $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ とすると、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ |\beta| &= \sqrt{c^2 + d^2} \\ \alpha\beta &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ |\alpha\beta| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)}^2 \sqrt{(c^2 + d^2)}^2 \\ &= |\alpha|^2 |\beta|^2 \\ &= (|\alpha||\beta|)^2 \\ & \quad \text{ここで、与えられた仮定 } |\alpha||\beta| = |\alpha\beta| \text{ を利用すると} \\ &= (|\alpha\beta|)^2 \\ &= (\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2})^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 3

Q. n 次の正方行列 A, B において、$AB = BA$ が成立する時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

A. まず、次の補題を示す。

補題 $AB = BA$ ならば $B^k A = AB^k$ である。

証明 k に関する、帰納法で示す。

(**$k = 1$ の時**) $B^k A = B^1 A = BA = AB = AB^k$ なので示せた。

(**$k = n$ が成立すると仮定して、$k = n + 1$ を示す**) $B^k A = B^{n+1} A = B^n BA = B^n AB$。ここで帰納法の仮定より、$B^n A = AB^n$ なので、$B^n AB = AB^n B = AB^{n+1} = AB^k$ となり、示せた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$B^k A = AB^k$ である。

更に、上記の補題を利用して、k に関する帰納法で示す。

(**$k = 1$ の時**) $(AB)^k = (AB)^1 = AB = A^1 B^1 = A^k B^k$ なので示せた。

(**$k = n$ が成立すると仮定して、$k = n + 1$ を示す**) $(AB)^k = (AB)^{n+1} = (AB)^n (AB)$ ここで、帰納法の仮定より、$(AB)^n = A^n B^n$ なので、$(AB)^n (AB) = A^n B^n AB$ ここで、上記の補題より、$B^n A = AB^n$ なので、$A^n B^n AB = A^n AB^n B = A^{n+1} B^{n+1} = A^k B^k$ となり、示せた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$(AB)^k = A^k B^k$ である。

問題 4

次の行列の階数 (Rank) を求めよ

A.1

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;$-\frac{1}{3}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-3) ; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;$\frac{2}{3}$) ; 2 列目に 1 列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;-1) ; 3 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;$\frac{1}{3}$) ; 4 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;$-\frac{2}{3}$) ; 5 列目に 1 列目を $-\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;−3) ; 2 行目を −3 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,2;−1) ; 4 行目に 2 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(5,2;−1) ; 5 行目に 2 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;1) ; 4 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5;1) ; 5 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,4;−1) ; 4 列目に 3 列目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(3,5;1) ; 5 列目に 3 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;$\frac{1}{3}$) ; 4 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(5,4;1) ; 5 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(4,5;$\frac{2}{3}$) ; 5 列目に 4 列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(5;3) ; 5 行目を 3 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 5

A.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;−1) ; 3 行目に 1 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;1) ; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;−1) ; 4 列目に 1 列目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;2) ; 5 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.3

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;$\frac{1}{3}$) ; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;−2) ; 2 行目に 1 行目を −2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;3) ; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;−1) ; 4 行目に 1 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;3) ; 5 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;$\frac{1}{3}$) ; 2 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;$\frac{1}{3}$) ; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;$\frac{1}{3}$) ; 5 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;$\frac{3}{2}$) ; 2 行目を $\frac{3}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,2;$\frac{2}{3}$) ; 4 行目に 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

左 R(5,2;1) ; 5 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;$\frac{1}{2}$)；3 列目に 2 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5;-1)；5 列目に 2 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(5, 3) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,5)；3 行目と 5 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;2)；3 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 R(3,5;4)；5 列目に 3 列目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

問題 5

次の行列の逆行列を求めなさい

A.1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,1;2)；4 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;3) ; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(4,2;9) ; 4 行目に 2 行目を 9 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 3) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,4) ; 3 行目と 4 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;−3) ; 1 行目に 4 行目を −3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

左 R(2,4;1) ; 2 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

左 R(3,4;1) ; 3 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;3) ; 1 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;−1) ; 1 行目を −1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,1;−1) ; 4 行目に 1 行目を −1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 12 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;−1) ; 2 行目を −1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 12 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;−3) ; 3 行目に 2 行目を −3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 12 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(4,2;2) ; 4 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 10 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;3) ; 4 行目に 3 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;7) ; 1 行目に 4 行目を 7 倍して、加える

A.3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 49 & 6 & 21 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(2,4;1) ; 2 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 49 & 6 & 21 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(3,4;3) ; 3 行目に 4 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 49 & 6 & 21 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;-2) ; 1 行目に 3 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 24 & 3 & 10 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;$-\frac{1}{3}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;3) ; 2 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;$-\frac{2}{3}$) ; 1 行目に 3 行目を $-\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

左 R(2,3;4) ; 2 行目に 3 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;$\frac{2}{3}$) ; 1 行目に 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 6

次の点と平面の間の距離を求めなさい

A.1

$$\frac{\sqrt{5}}{15}$$

A.2

$$\frac{2\sqrt{29}}{29}$$

A.3

$$\frac{11\sqrt{2}}{4}$$