代幾 I 小テスト [問題] (2008/11/13)

[注意]

- このテストは、古津先生の中間テストです。いつもとルールが異なるので注意してください。
  - 試験時間は 90 分です。
  - 持ち込みは「不可」です。もちろん、相談もできません。
  - 解答は別紙の解答用紙に記入してください。できるだけ途中の計算結果も書きましょう。

問題 1

次の 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について次の問に答なさい。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ i+1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

1. 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を求めよ。
2. $\boldsymbol{x}$ の長さ $|\boldsymbol{x}|$ を求めよ。

問題 2

1. 次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

問題 3　次の行列式を因数分解しなさい。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

問題 4

次の連立方程式をクラーメルの公式を用いて解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} \quad 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -4 \\ -x_0 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_0 + 5x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

問題 5　4 次の置換群 S_4 の要素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して、S_4 の部分集合 A_σ を、$A_\sigma = \{\tau \in S_4 | \tau\sigma = \sigma\tau\}$ (σ との積が可換になるような要素全体の集合) と定めるとする。この時、次の問いに答えなさい。

1. $\sigma^n \in A_\sigma (\forall n \in \boldsymbol{Z})$ を示しなさい。
2. $\tau, \rho \in A_\sigma \to \rho\tau \in A_\sigma$ を示しなさい。
3. τ を互換とし、$\rho \in A_\sigma$ とすると、$\rho\tau \notin A_\sigma$ であることを示せ。
4. S_4 の要素数が $4! = 24$ であり、また、S_4 に含まれる相異なる互換が ${}_4C_2 = 6$ 個あることを利用して A_σ の要素の個数を求めよ。
5. A_σ の要素を全て列挙しなさい。

代幾 I 小テスト [解答] (2008/11/13)

問題 1

次の 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について次の問に答なさい。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ i+1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

1. **Q.** 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を求めよ。

   A.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ i+1 \\ 1-i \end{pmatrix}) \\ &= i \times \overline{3} + (-i) \times \overline{i} + 1 \times \overline{(i+1)} + (-1) \times \overline{(1-i)} \\ &= i \times 3 + (-i) \times (-i) + 1 \times (-i+1) + (-1) \times (1+i) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

2. **Q.** $\boldsymbol{x}$ の長さ $|\boldsymbol{x}|$ を求めよ。

   A.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}| &= \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \\ &= \sqrt{(\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})} \\ &= \sqrt{i \times \overline{i} + (-i) \times \overline{(-i)} + 1 \times \overline{1} + (-1) \times \overline{(-1)}} \\ &= \sqrt{i \times (-i) + (-i) \times i + 1 \times 1 + (-1) \times (-1)} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

問題 2

1. **Q.** 次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \end{vmatrix}$$

A.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \begin{vmatrix} 1^0 & i^0 & (-i)^0 & (-1)^0 \\ 1^1 & i^1 & (-i)^1 & (-1)^1 \\ 1^2 & i^2 & (-i)^2 & (-1)^2 \\ 1^3 & i^3 & (-i)^3 & (-1)^3 \end{vmatrix} \\ & \text{即ち、ヴァンデルモンドの行列式} \\ &= \Delta(1, i, -i, -1) \\ &= ((-1)-(-i))((-1)-i)((-1)-1)((-i)-i)((-i)-1)(i-1) \\ &= 4i(i-1)(i+1)(i+1)(i-1) \\ &= 16i \end{aligned}$$

2. **Q.** 次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 列目から、3 列目を引く} \\
&= (-2)\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 行目で展開} \\
&= (-2)\begin{vmatrix} -3 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 列目から 4 列目を引いた} \\
&= (-2)(-3)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 列目で展開} \\
&= (-2)(-3)\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 列目から 3 列目を引いた} \\
&= (-2)(-3)(-2)\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} && \text{1 行目で展開} \\
&= (-2)(-3)(-2)(7\cdot 2 - 8\cdot 4) && \text{たすきがけ} \\
&= 216
\end{aligned}
$$

問題 3

Q. 次の行列式を因数分解しなさい。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

A.

$$\begin{aligned}
与式 &= \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{一列目に二、三、四列目を加えた}) \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{一列目の共通因数を括り出した}) \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{二、三、四行目から、一行目を引いた}) \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{一列目で展開}) \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b+c-d & -a+b-c+d & a-b+c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{一行目から二行目を引いて三行目を加えた}) \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{一行目の共通因子を括り出した})
\end{aligned}$$

(続き)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-b & a-b-c+d & 2(b-d) \\ c-b & -b+d & a+b-c-d \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(一列目を二列目に加え三列目から引いた)} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-b-c+d & 2(b-d) \\ -b+d & a+b-c-d \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(一行目で展開)} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(a-b-c+d)(a+b-c-d)+2(b-d)^2\} \\
&\quad \text{(たすきがけ)} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{[(a-c)-(b-d)][(a-c)+(b-d)]+2(b-d)^2\} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{[(a-c)^2-(b-d)^2]+2(b-d)^2\} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(a-c)^2+(b-d)^2\}
\end{aligned}
$$

(ここまでで、答としても良いが、ついでなので..)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{(a-c)^2-[i(b-d)]^2\} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\{[(a-c)+i(b-d)][(a-c)-i(b-d)]\} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)
\end{aligned}
$$

(更に、規則性を探すと..)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (a+b+c+d)(a+bi-c-di)(a-b+c-d)(a-bi-c+di) \\
&= (a\times 1^0+b\times i^0+c\times(-1)^0+d\times(-i)^0)(a\times 1^1+b\times i^1+c\times(-1)^1+d\times(-i)^1) \\
&\quad (a\times 1^2+b\times i^2+c\times(-1)^2+d\times(-i)^2)(a\times 1^3+b\times i^3+c\times(-1)^3+d\times(-i)^3) \\
&= \prod_{k=0}^{3}(a\times 1^k+b\times i^k+c\times(-1)^k+d\times(-i)^k)
\end{aligned}
$$

更に言えば、$1=i^0, i=i^1, -1=i^2, -i=i^3$ なので...[1]

[1]自分で考えてみよう..

問題 4
次の連立方程式をクラーメルの公式を用いて解きなさい。

A.1

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{|A_0|}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1 \\ x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1 \\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2 \end{cases}$$

問題 5　4 次の置換群 S_4 の要素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して、S_4 の部分集合 A_σ を、$A_\sigma = \{\tau \in S_4 | \tau\sigma = \sigma\tau\}$ (σ との積が可換になるような要素全体の集合) と定めるとする。この時、次の問いに答えなさい。

1. **Q.** $\sigma^n \in A_\sigma (\forall n \in \boldsymbol{Z})$ を示しなさい。

   A. [証明] $\sigma^n\sigma = \sigma^{n+1} = \sigma\sigma^n$ なので、$\sigma^n\sigma = \sigma\sigma^n$。即ち $\sigma^n \in A_\sigma$。

2. **Q.** $\tau, \rho \in A_\sigma \rightarrow \rho\tau \in A_\sigma$ を示しなさい。

   A. [証明] $(\rho\tau)\sigma = \rho(\tau\sigma) = \rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau = (\sigma\rho)\tau = \sigma(\rho\tau)$ なので、$(\rho\tau)\sigma = \sigma(\rho\tau)$。即ち $\rho\tau \in A_\sigma$。

3. **Q.** τ を互換とし、$\rho \in A_\sigma$ とすると、$\rho\tau \notin A_\sigma$ であることを示せ。

   A. [証明] まず、$\sigma(i) = ((i+2) \mod 4)+1 \neq i \neq \sigma^2(i) = ((i+1) \mod 4)+1$ $(\forall i \in 1..4)$ と、$i \neq j \to \sigma(i) \neq \sigma(j)$ $(\forall i, j \in 1..4)$ に注意する。

   互換を $\tau = (j, k)$ $(j \neq k)$ とすると、$\tau\sigma = \sigma\tau$ となるための必要十分条件は、両辺に左から τ^{-1} を掛けた $\sigma = \tau^{-1}\sigma\tau$ であるが、τ が 互換なので $\tau^{-1} = \tau$ となり、結局、$\sigma = \tau\sigma\tau$ となる。これが成立する為には、少なくとも $\sigma(k) = \tau\sigma\tau(k) = \tau\sigma(j)$ かつ $\sigma(j) = \tau\sigma\tau(j) = \tau\sigma(k)$ でなければならない。ところが、次のように $\sigma(j)$ の値で場合わけすると、

   ($\sigma(j) = k$ の場合) $\sigma(k) = \tau\sigma(j) = \tau(\sigma(j)) = \tau(k) = j$ となる。すなわち、$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(k) = j$ なので $\sigma^2(j) = j$。これは、矛盾。

   ($\sigma(j) \neq k$ の場合) $\sigma(k) = \tau\sigma(j) = \tau(\sigma(j)) = \sigma(j)$ ($\sigma(j)$ は、j でも k でもなく、τ は、j, k 以外は変化させないので)。これは、矛盾。

   何れの場合も成立しないので、$\tau \notin A_\sigma$ である。

   また、τ を互換とし、$\rho \in A_\sigma$ かつ、$\rho\tau \in A_\sigma$ とすると、$\rho(\tau\sigma) = (\rho\tau)\sigma = \sigma(\rho\tau) = (\sigma\rho)\tau = (\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$ なので、$\rho(\tau\sigma) = \rho(\sigma\tau)$ となる。ここで、両辺に左から ρ^{-1} をかけると、$\tau\sigma = \sigma\tau$ となり、これは、$\tau \in A_\sigma$ を意味するので、矛盾。

   以上により、$\tau\rho \notin A_\sigma$。

4. **Q.** S_4 の要素数が $4! = 24$ であり、また、S_4 に含まれる相異なる互換が ${}_4C_2 = 6$ 個あることを利用して A_σ の要素の個数を求めよ。

   A. 【注意】この問題は、「失題」である。「A_σ の要素の個数」と、「S_4 に含まれる相異なる互換の個数」は無関係なので、互換とは関係なく、「A_σ の要素の個数」を求める。

   [解答] $\rho \in A_\sigma$ とする。ここで、ρ の 1 の像に着目して考える。$\rho(1) = n$ とすると、$\sigma(n) = \sigma(\rho(1)) = \sigma\rho(1) = \rho\sigma(1) = \rho(\sigma(1)) = \rho(4)$、すなわち、$\rho(4) = \sigma(n)$ となる。同様にして、$\rho(3) = \rho(\sigma(4)) = \sigma(\sigma(n))$、$\rho(2) = \rho(\sigma(3)) = \sigma(\sigma(\sigma(n)))$ と一意に定まる。よって、$\rho(1) = n = 1, 2, 3, 4$ の 4 種類しかない。

5. **Q.** A_σ の要素を全て列挙しなさい。

   A. 前問の結果より、A_σ の要素は σ^n $(n = 0, 1, 2, 3)$ の 4 つだけである。

$$
\begin{aligned}
A_\sigma &= \{\sigma^0 = 1_4, \sigma^1 = \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \\
&= \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\}
\end{aligned}
$$