代幾 I 小テスト [問題] (2009/01/15)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1

線型空間 W の、次の二組の基底の変換行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{aligned} W &= \{v \in V^3 | v_1 - 2v_2 + v_3 = 0\} \\ E &= < \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} > \\ F &= < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

Q.2

$$\begin{aligned} W &= \{v \in V^3 | -2v_1 - v_2 + v_3 = 0\} \\ E &= < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} > \\ F &= < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

問題 2

次の行列 A によって定まる線型変換 T_A の基底 E, F に関する行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ E &= < \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} > \\ F &= < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

Q.2

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ E &= < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \\ F &= < \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

問題 3

次の独立なベクトルから、シュミットの直交化を利用して、正規直交系を求めなさい

Q.1

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} >$$

Q.2

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

問題 4 行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を満たすとき、$A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 5 3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。

1. AB
2. BA
3. A^2
4. B^2

代幾 I 小テスト [解答] (2009/01/15)

問題 1

線型空間 W の、次の二組の基底の変換行列を求めなさい。

A.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 2

次の行列 A によって定まる線型変換 T_A の基底 E, F に関する行列を求めなさい。

A.1

$$\begin{pmatrix} -7 & -21 & -9 \\ -4 & -12 & -5 \\ -14 & -43 & -18 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -9 & -5 & -4 \\ 13 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 3

次の独立なベクトルから、シュミットの直交化を利用して、正規直交系を求めなさい

A.1

$$< \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} \\ -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ -\frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} >$$

A.2

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} >$$

問題 4

Q. 行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を満たすとき、$A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \\
&= A(-\boldsymbol{x}) + A(2\boldsymbol{y}) + A\boldsymbol{z} \\
&= -(A\boldsymbol{x}) + 2(A\boldsymbol{y}) + A\boldsymbol{z} \\
&= -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+2+0 \\ -2-6+1 \\ 1+4-3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 5

Q. 3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

A.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= |A| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= |{}^tA| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 6

Q.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。

A. まず、

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、$I^2 = I$, $J^2 = I$, $O^2 = O$, $IJ = JI = J$, $OI = IO = OJ = JO = O$, $I + O = O + I = I$, $J + O = O + J = J$ であり、区分けによって、

$$A = \begin{pmatrix} 2J & J \\ O & -I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} O & -I \\ I & 2I \end{pmatrix}$$

と表すことができることに注意する。

1. **Q.** AB

   A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= AB \\
&= \begin{pmatrix} 2J & J \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -I \\ I & 2I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2JO + JI & -2JI + 2JI \\ OO - II & -OI - 2II \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J & O \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. **Q.** BA

   A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= BA \\
&= \begin{pmatrix} O & -I \\ I & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2J & J \\ O & -I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2OJ - IO & OJ + II \\ 2IJ + 2IO & IJ - 2II \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O & I \\ 2J & J - 2I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. **Q.** A^2

A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= A^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2J & J \\ O & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2J & J \\ O & -I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4JJ+JO & 2JJ-JI \\ 2OJ-IO & OJ+II \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4I & 2I-J \\ O & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. **Q.** B^2

A.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= B^2 \\
&= \begin{pmatrix} O & -I \\ I & 2I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -I \\ I & 2I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} OO-II & -OI-2II \\ IO+2II & -II+4II \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -I & -2I \\ 2I & 3I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$