代機 A (公式集)

栗野俊一 *

2008/07/17 (Ver. 0.1)

1　平面図形

1.1　直線と点の距離

直線 $ax + by = c$ と、点 (x_0, y_0) の距離は次の公式で計算できる。

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.2　内積

二つの平面ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の内積 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は次のように計算される。

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + y_1y_2$$

1.3　行列式

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は次のように計算される。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

* 日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

1.4 射影

平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ への射影 $T_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表現される。

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

また、これに対応する行列は次のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2} & \frac{x_1 y_1}{x_1^2+y_1^2} \\ \frac{y_1 x_1}{x_1^2+y_1^2} & \frac{y_1^2}{x_1^2+y_1^2} \end{pmatrix}$$

2 空間図形

2.1 平面と点の距離

直線 $ax + by + cz = d$ と、点 (x_0, y_0, z_0) の距離は次の公式で計算できる。

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2.2 内積

二つの空間ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の内積 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は次のように計算される。

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

2.3 外積

二つの空間ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ は次のように計算される。

$$
\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}
$$

2.4 行列式

3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は次のように計算される。

$$
\begin{aligned}
|A| &= \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

2.5 射影

2.5.1 ベクトルへの射影

空間ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ への射影 $T_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表現される。

$$
T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}
$$

また、これに対応する行列 $A_{\boldsymbol{v}}$ は、次のように与えられる。

$$
A_{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{x_1 y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{x_1 z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ \frac{y_1 x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{y_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{y_1 z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ \frac{z_1 x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{z_1 y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{z_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \end{pmatrix}
$$

2.5.2 平面への射影

空間の平面 $x_1x + y_1y + z_1z = c$ への射影 S は、空間ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ への射影 $T_{\boldsymbol{v}}$ を用いて、次のように表現される (ここで、$\boldsymbol{v}$ は、与えられた平面に垂直なベクトルになっていることに注意)。

$$S(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

また、これに対応する行列 B は、$A_{\boldsymbol{v}}$ を用いて、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} B &= E - A_{\boldsymbol{v}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{y_1^2+z_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & -\frac{x_1y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & -\frac{x_1z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ -\frac{y_1x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{x_1^2+z_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & -\frac{y_1z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ -\frac{z_1x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & -\frac{z_1y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} & \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$