代機 B (公式集)

栗野俊一 *

2008/11/08 (Ver. 0.1b)

1 複素ベクトルの内積

1.1 内積の定義

$\boldsymbol{C}^n$（要素が複素数 ($\boldsymbol{C}$) であるような n 次元ベクトルの集合）の二つの要素

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して、この二つのベクトルの**内積 (エルミート積)** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は次のように定義[1]される。

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

1.2 内積の性質

内積の性質[2] は以下の通り。

$$\text{共役線型性} \left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \end{array} \right\} & \text{(和が外に出せる)} \\ \left. \begin{array}{l} (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{array} \right\} & \text{(定数倍が外に出せる}^{3}\text{)} \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} & \text{(交換すると共役複素数になる)} \end{array} \right.$$

$$\text{正値性} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0, ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$$

* 日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

[1] Text p.61 式 (1)

[2] Text p.61-61 定理 [6.1] の式 (2)-(5)

自分自身との内積が 0 になるのは、そのベクトルが $\mathbf{0}$ ベクトルの時のみ。逆に $\mathbf{0}$ ベクトルでない場合は、正の実数 (0 より大きい実数) になる。

注意

- この内積の新しい定義は、これまでやった実数ベクトルでも、そのまま成立するので、以前に学んだ定義の**一般化** になっている。
- 複素数を扱うことによって共役複素数の扱いが必要になったので、次の二つの等式が以前と変ったので注意!!

$$\begin{array}{ll} (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \text{(定数を外に出す時に、右側の場合は共役複素数が出る} \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} & \text{(交換すると共役複素数になる)} \end{array}$$

- 内積の値は一般に複素数になる (実数になるとは限らない) が、「自分自身との内積」は常に非負の実数になる。

1.3 長さ (ノルム) の定義

自分自身との内積の負でない平方根を、そのベクトル ($\boldsymbol{x}$) の**長さ *(ノルム)*** と呼び、$|\boldsymbol{x}|$ [4]で表す[5]。

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

1.4 長さ (ノルム) の性質

長さに関して次の性質が成り立つ[6]。

$$\begin{array}{lll} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| & \text{(等式の成立は、平行な場合)} & \text{(シュヴァルツの不等式)} \\ |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| & \text{(等式の成立は、平行かつ向きが等しい場合)} & \text{(三角不等式)} \end{array}$$

2 行列式

2.1 行列式の定義

n 次正方行列[7] $A = (a_{i,j})\,(a_{i,j} \in \boldsymbol{C})$ に対して、次の和で定義される複素数

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

[4]これは、$\boldsymbol{x}$ の長さまたは、ノルムである。絶対に「絶対値」と読んではいけない..。

[5]Text p.62 式 (6)

[6]Text p.62 定理 [6.2] の式 (7),(8)

[7]行列式は、正方行列以外には意味がないことに注意しよう。敢て、正方でない行列に対する行列式を定義するとすれば、それは、常に 0 になると考えてもよいかもしれない.

を、行列 A の**行列式** と呼び[8] 、$|A|, |a_{i,j}|, detA, det(a_1, ..a_n)$ などで表す。

2.2 行列式の性質

A を n 次正方行列とすると、次のような等式が成り立つ

定数倍 $|cA |= c^n|A|$: 定数倍の行列式は行列式の定数の n 乗倍

注意 $|cA| = |c||A|$ とする間違いが多い !! これは誤り。同様に $|A + B| = |A| + |B|$ とする間違いも多い !! これも誤り。

転置行列 $|{}^tA| = |A|$: 転置の行列式は変らない。

注意 この公式は非常に重要。これによって、「行列式に関して、行に関する性質と列に関する性質はいつでも一緒に成立する」ことが解る。したがって、以下、行 (または列) に関する性質を示せば、自動的に、列 (または行) の性質が示された事になる。

n **重線型性と交代性質** 次の行列式に関する二つの性質は本質的[9]

n **重線型性**

列の和 $det(a_1, .., a_j + a'_j, .., a_n) = det(a_1, .., a_j, .., a_n) + det(a_1, ..a'_j, .., a_n)$

定数倍 $det(a_1, .., c\ a_j, .., a_n) = c\ det(a_1, .., a_j, .., a_n)$ (これは、行の定数倍を行う基本操作が行列式に与える効果を意味している)

n **交代性** $\tau \in S_n$ の時、$det(a_{\tau 1}, a_{\tau 2}, .., a_{\tau n}) = \mathrm{sgn}\tau\ det(a_1, a_2, .., a_n)$ (特に、τ が互換の場合を考えると、交換の基本操作が行列式に与える効果を表している)

等しい列 (列) を持つ行列の行列式 A の二つの列 (行) が一致すれば $|A| = 0$

和の基本操作 A のある列に他のある列の定数倍を加えて作られる行列の行列式は $|A|$ (つまり、一つの行に他の行の定数倍を加える基本操作は、行列式の値を変化させない)

n **重線型性と交代性を持つ関数** n 個の列ベクトルの組 $x_1, .., x_n$ に対応して $F(x_1, .., x_n)$ を対応させる写像 F が、n 重線型性と交代性を満すならば、それは $F(e_1, .., e_n)det(x_1, .., x_n)$ となる。

行列の積 $|AX| = |A| \cdot |X|$: 行列の積の行列式は、行列式の積になる。

---

[8] $|A|$ を A の接待値とは絶対に ...

[9] こちらを行列式の定義としている本もある

2.3 特別な形の行列の行列式

右上、あるいは左下に零行列の小行を持つ行列の行列式 対称区分け[10]を行った結果、右上、あるいは左下が零行列の場合は、行列式が単純化される。

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & O \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22}|$$

A_{11} の次元が 1 の場合 更に、A_{11} が 1 次元の場合は、単純に行列式の次元が一つ下げられることに注意。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ O & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意 これは、後の**行列式の展開** の特別な場合、行列式の次元を下げるために利用される。

ヴァンデルモンド の行列

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{i<j}(x_j - x_i) = \Delta(x_1, .., x_n)(\text{差積})$$

2.4 小行列式と余因子

定義 (小行列式) n 次正方行列 A の第 i 行、第 j 列目を取り除いてできる小行列式を A の第 (i, j) **小行列式** と呼び $\Delta_{i,j}$ で表す。

定義 (余因子) n 次正方行列 A の第 (i, j) 小行列式 $\Delta_{i,j}$ に $(-1)^{i+j}$ を掛けてできる値 $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ を A の第 (i, j) **余因子** と呼び $\tilde{a}_{i,j}$ で表す。

[10]対称区分けなので、A_{11}, A_{22} が正方行列になる。なお、零行列の部分は、別に正方行列である必要はない。

2.5　行列式の展開

行列式は、特定な行、列の要素と、余因子を使って表現 (展開) することができる。

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots a_{nj}\tilde{a}_{nj} \quad (\forall j = 1,2,..,n) \quad j \text{ 列に関する展開} \\
|A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots a_{in}\tilde{a}_{in} \quad (\forall i = 1,2,..,n) \quad i \text{ 行に関する展開}
\end{aligned}
$$

元の行列式の次数 n に対して、余因子 (の中に現れる小行列式) の次数は $n-1$ となるので、行列式の展開を利用することにより、行列式の計算において、「行列式の次数を引き下げる」効果がある。

特に、基本変形を利用して、展開する列 (行) の要素のほとんどを 0 にすれば、展開よって項目数を減らすことができる。

2.6　行列式と逆行列、連立方程式

逆行列 A が正則であれば、A の逆行列 A^{-1} は次の様に、行列式を用いて、表現することができる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\tilde{a}_{i,j})$$

ただし、$\tilde{a}_{i,j}$ は $|A|$ の (i,j) 余因子

クラメルの公式 連立方程式 $Ax = b$ で、$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ が正方行列 (つまり、変数の個数と式の本数が同じ) の場合で、かつ、A の行列式 $|A|$ が 0 でない時、次のようにして連立方程式を解く事ができる。

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \text{ (ただし},|A_i| = det(a_1, .., a_{i-1}, b, a_{i+1}, .., a_n)\text{(即ち、}|A|\text{ の第 }i\text{ 列目を }b\text{ に入れ替えたもの)}$$