

代機 B (公式集 2)

栗野俊一 *

2009/01/23 (Ver. 0.1c)

目次

1	線型空間	2
1.1	線型空間の定義	2
1.2	線型空間の公理	2
1.3	線型空間の例	3
2	計量空間	4
2.1	計量空間	4
2.2	内積の公理系	5
2.3	計量空間の例	5
2.4	直交	6
2.5	長さ (ノルム)	6
3	基底	7
3.1	線型結合	7
3.2	張る空間	7
3.3	線型独立と線型従属	8
3.4	基底	9
3.5	正規直交基底	10
3.6	次元	10
4	線型写像	11
4.1	線型写像の定義	11
4.2	同型対応と同型	11
4.3	基底による同型変換	12

*日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

5	後期試験に出る課題	12
5.1	基底の取り換え行列	12
5.2	基底に関する線型写像の行列	14
5.3	シュミットの直交化法	16

1 線型空間

1.1 線型空間の定義

定義 1 (線型空間の定義¹) 線型空間とは、次の線型空間の公理を満すような演算(和と、スカラー倍)が定義されている集合の事を指す。

代機 A で学んだ、平面ベクトルの集合や、空間ベクトルの集合、そして、一般に、 n 次元の列ベクトル全体の集合などは、線型空間の例になっている²。

1.2 線型空間の公理

定義 2 (線型空間の公理³) K を R (実数) あるいは C (複素数) とする時、集合 V が次の二つの条件 (I),(II) を満す時、 V を (K -) 線型空間と呼ぶ。

(I. 和の公理) V の二つの元 x, y に対して和と呼ばれる第三の元(これを「 $x + y$ 」で表す)が定まり、次の法則が成り立つ。

$$(1) (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) x + y = y + x \quad (\text{交換法則})$$

(3) 零ベクトル(零元)と呼ばれる特別な元(これを「 o 」で表す)が、ただ一つ存在し、 V の全ての元 x に対して、 $o + x = x$ が成り立つ。 (零元の存在)

(4) V の任意の元 x に対して、 $x + x' = o$ となる V の元 x' が存在する。これを x の逆ベクトル(逆元)といい、「 $-x$ 」で表す。 (逆元の存在)

(II. スカラー倍の公理) V の任意の元 x , と、 K の任意の要素 a に対して x の a 倍(スカラー倍)と呼ばれるもう一つの V の元(これを「 ax 」で表す)が定まり、次の法則が成り立つ。

²なので、もし、「線型空間」と言われたら、とりあえず、それは、「空間ベクトル全体の集合」なんだと思うことにしよう。もちろん、線型空間の要素は、ベクトル(数が並んだもの..)とは限らず、(線型空間の公理を満すような..)関数だったり、数列だったり、ベクトル以外の様々なものである可能性があるのだが..。「例」を考える時には、「とりあえず、ベクトル」で例を考え、もし、それで駄目だったら、もう少し(線型空間の性質に着目して..)、考えると良い。

$$(5) (a + b)x = ax + bx$$

$$(6) a(x + y) = ax + ay$$

$$(7) a(bx) = (ab)x$$

$$(8) 1x = x$$

この条件 (I), (II) の事をあわせて線型空間の公理 と呼ぶ。

定義 3 (実線型空間と複素線型空間⁴) K -線型空間の K が複素数 (C) の時、その線型空間は、複素線型空間 と呼び、 K が実数 (R) の時、その線型空間は、実線型空間 と呼ぶ。

1.3 線型空間の例

例 1 (空間のベクトル全体 (V^3)) 空間のベクトル全体の集合 $V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$ は、ベクトルの和ならびに、ベクトルの実数倍に関して、実線型空間となる⁵。

例 2 (2 次の正方行列 ($M_{2,2}$)) 2 次の正方行列 $M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C \right\}$ は、行列の和ならびに、行列の複素数倍に関して、複素型空間となる。

例 3 (波 (W)) 集合 $W = \{ a \cos x + b \sin x \mid a, b \in R \}$ に対して、次のように和 と スカラー倍 を定義する。すると、この集合 W は、この和とスカラー倍に対して、実線型空間となる⁶。

和 $f, g \in W$ とする時、 $h = g + f \in W$ を、 $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ で定義する⁷。特に、 $f = a_1 \cos x + b_1 \sin x, g = a_2 \cos x + b_2 \sin x$ とすれば、 $h = f + g = (a_1 + a_2) \cos x + (b_1 + b_2) \sin x \in W$ となる。

スカラー倍 $f \in W, c \in R$ とする時、 $h = cf \in W$ を、 $h(x) = (cf)(x) = c(f(x))$ で定義する⁸。特に、 $f = a_1 \cos x + b_1 \sin x$ の時、 $h = cf = c(a_1 \cos x + b_1 \sin x) = (ca_1) \cos x + (cb_1) \sin x \in W$ となる。

⁵このように、集合に対して、和とスカラー倍の演算が定義されていて、その演算が、線型空間の公理を満たせば、その集合が、その和とスカラー倍に関して線型空間になる。ということは、同じ集合であっても、異なる和や、スカラー倍を定義すれば、異なる線型空間になることに注意しよう。

⁶ここで定義した和 と スカラー倍 は、きちんと、線型空間の公理 を満たしていることを確認する必要がある(もし、満たしていなければ、線型空間にならない)。「これは線型空間か？」という問題に対する、基本的な対応方法は、「そこで定義されている、和とスカラー倍が、線型空間の公理を満たしているかどうかを判定」し、もし、全ての条件を満たしているならば、「はい」、そうでなければ「いいえ」と答えることになる。

⁷最初の $f + g$ の「+」は、 W の要素に関する和として、ここで新たに定義する「+」であるが、二番目の $f(x) + g(x)$ の「+」は、関数の値(実数値)の和、すなわち、単なる実数の和である。

⁸上記の和 (+) と同様、関数のスカラー倍 を 関数値の実数倍 で定義している。

例 4 (n 項 (K -) 列ベクトル全体の集合 (K^n)) K の要素を縦に n 個並べた、列ベクトル

(n 項縦ベクトル) 全体の集合 $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in K \right\}$ は、線型空間である⁹。

例 5 (変った例) 二次の正方行列 $M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C \right\}$ に対して、次のように和とスカラー倍を定義する。

和 $e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ に対して、和 $e + f$ を $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ c_2 - c_1 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$ で定義する。

スカラー倍 $e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, c \in C$ に対して、スカラー倍 ce を $\begin{pmatrix} ca_1 & b_1 \\ c_1 & cd_1 \end{pmatrix}$ で定義する。

すると、 $M_{2,2}$ は、この和とスカラー倍に対して線型空間になっていない。実際に、 $e + f = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ c_2 - c_1 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 - b_2) \\ -(c_2 - c_1) & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & b_2 - b_1 \\ c_1 - c_2 & d_2 + d_1 \end{pmatrix} = f + e$ なので、公理の I-2(交換法則)が成立しない¹⁰。

ところが、二次の対角行列全体の集合 $D_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in C \right\}$ を考えると、この $D_{2,2}$ は、先の和と、スカラー倍に関して、線型空間となる。

2 計量空間

2.1 計量空間

定義 4 (計量空間¹¹) 内積が定義されている¹² 線型空間のことを計量空間と呼ぶ¹³。

⁹代機 A で学んだように、この K^n は最も、基本的な線型空間となる。線型空間の性質は、全てこの K^n を基本に作られており、もし、線型空間の性質を知りたければ、 K^n に関して考えればよい。実際に、後で述べるように、どのような線型空間に対しても (線型空間として、同じ性質をもつ) 同型な K^n が存在することが示されるので、与えられた線型空間の (線型空間としての..) 性質は、すべて、その同型な K^n の性質から導くことができるので、 K^n だけを考えればよいことになる。

¹⁰この様に、線型空間でないことを示すには、公理の条件のいずれか一つだけでも、成立しないことを示すだけでよい。

¹²ここでの内積とは、次の内積の公理を満すような演算のことである。

¹³このように集合 S が特定な性質 C を満す時に、この S を改めて C 空間 S と呼ぶことになる。

2.2 内積の公理系

定義 5 (内積の公理¹⁴) K 上の線型空間 V の二元 x, y に対して、 K の元 (これを「 (x, y) 」で表す) が定まり、次の性質を持つ。

(IV. 内積の公理)

$$(1) \begin{cases} (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (cx, y) = c(x, y) \\ (x, cy) = \bar{c}(x, y) \end{cases}$$

$$(3) (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(4) (x, x) \text{ は } 0 \text{ または正の実数であり、} (x, x) = 0 \text{ となるのは、} x = o \text{ の時に限る。}$$

2.3 計量空間の例

例 6 V^3 は、空間ベクトルの内積 に対して計量空間になっている¹⁵。

例 7 K^n の場合、二つの要素 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、 $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ と

内積を定義すれば、この内積に関して、 K^n は、計量空間になる。

例 8 $M_{2,2}$ の場合、二つの要素 $x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ に対して、 $(x, y) = a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2 + c_1 \bar{c}_2 + d_1 \bar{d}_2$ と内積を定義すれば、この内積に関して、 $M_{2,2}$ は、計量空間になる。

例 9 W の場合、二つの要素 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x, g(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$ に対して、 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ と内積を定義すれば、この内積に関して、 W は、計量空間になる。

例 10 W の場合、二つの要素 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x, g(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$ に対して、 $(f, g) = f(0)g(0) + f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})$ と内積を定義¹⁶ すれば、この内積に関して、 W は、計量空間になる。

¹⁵空間ベクトルの内積 が、内積の公理 を満すことは調べる必要があるが、これは、代機 A で既にやっている。

¹⁶これは、先と異なる内積の定義である。 W の場合は、このように定義しても内積になることが解る。

2.4 直交

定義 6 (直交¹⁷) 計量空間 V の二つの要素 x, y に対して、その内積の値が 0 になる時 (すなわち $(x, y) = 0$ の時)、この二つの要素は、互いに直交する と言う。

例 11 W の二つ要素 $\cos x + \sin x, \cos x - \sin x$ は、互いに直交している。実際に、

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x, \cos x - \sin x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x - \sin^2 x dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}(\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)) \\ &= \frac{1}{2}(0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

と、内積が 0 になる。

2.5 長さ (ノルム)

定義 7 (長さ (ノルム)¹⁸) 計量空間 V の要素 v に対して、自分自身との内積の正の平方根 $\sqrt{(v, v)}$ を、 v の長さ (ノルム)¹⁹ と呼び、 $|v|$ で表す。

例 12 W の要素 $\cos x + \sin x$ の長さ $|\cos x + \sin x|$ は、 $\sqrt{2\pi}$ となる。実際、

$$\begin{aligned}|\cos x + \sin x| &= \sqrt{(\cos x + \sin x, \cos x + \sin x)} \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + \sin x)^2 dx} \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos x \sin x) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx} \\ &= \sqrt{[x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} [\cos(2x)]_{-\pi}^{\pi}} \\ &= \sqrt{(\pi - (-\pi)) - \frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(-2\pi))} \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

となる。

¹⁹計量空間の計量 とは、要するに、長さ (や、角度..) を測ることができる 空間ということ。

3 基底

3.1 線型結合

定義 8 (線型結合²⁰) V を K -線型空間とし、 x_1, x_2, \dots, x_n を V の要素とする。これと、 K の要素 c_1, c_2, \dots, c_n を利用して作られる次の (形式的) 要素 (これは、 V の要素になる) を、 x_1, x_2, \dots, x_n の線型結合と呼ぶ²¹。

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i$$

例 13 線型空間 $M_{2,2}$ の二つの要素 $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。

$c_1e + c_2f$ の形をした要素が、 e と f の線型結合なので、例えば、 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ は、 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2e - 3f$ と、 e と f の線型結合の形で表すことができるので、 e と f の線型結合である。

逆に、 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、どのような $c_1, c_2 \in R$ に対しても、 $c_1e + c_2f$ の形に表せない (どのような c_1, c_2 に対しても、 e と f の線型結合の $2, 2$ 要素は必ず 0 になる) ので、これは e と f の線型結合で表すことができない。

3.2 張る空間

定義 9 (張る空間) V を K -線型空間とし、 x_1, x_2, \dots, x_n を V の要素とする。この時、 x_1, x_2, \dots, x_n の線型結合で表現できる要素全体の集合 $\{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in K\}$ を、 x_1, x_2, \dots, x_n が張る空間と呼び、 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ で表す。

例 14 線型空間 $M_{2,2}$ の二つの要素 $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。

e と f が張る空間 $\langle e, f \rangle = \{c_1e + c_2f \mid c_1, c_2 \in C\}$ には、 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ が含まれるが、 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は含まれない。

²¹ここでは、 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) だけに注目しており、 c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の方には条件がないことに注意しよう。また、この結果として、 c_i の取り方が任意なので、 x_1, x_2, \dots, x_n の線型結合には色々なものがある事が解る。

例 15 線型空間 V^3 の三つの要素 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が張る空間は、 V^3 自身である (すなわち $V^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ である)。

例 16 空間のベクトル全体の集合 V^3 の四つの要素 $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える。この時、この四つの要素が張る空間 $\langle w, x, y, z \rangle$ を考える。すると、

これには、 z 要素が 0 であるような全てのベクトル (例えば、 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ これは、 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$w + x + y + z = x + 2z (= 0w + 1x + 0y + 2z)$ と、 w, x, y, z の線型結合で表すことができるので、 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle w, x, y, z \rangle$ である。) が含まれるが、 z 要素が 0 でない要素 (例

えば、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) は含まれない。

3.3 線型独立と線型従属

K -線型空間 V の要素 x_1, x_2, \dots, x_n に関して、その線型結合 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i$ と零ベクトル o を等式で結んだ式 (線型関係) を考える。

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i = o$$

これは、実は、係数 (c_1, c_2, \dots, c_n) に関する連立方程式となっている。

そして、この係数を全て 0 にすれば、この等式は必ず成立するので、 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ は、常に、この線型関係の表す連立方程式の解になっている。この解を、自明な解と呼ぶ。

もし、この連立方程式の解が、この自明な解以外に存在しない場合、この n 個のベクトルは互いに線型独立であるといい、逆に、もし、自明な解以外の解がある場合は、線型従属と呼ぶ。

例 17 V^3 の二つの要素 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は互いに独立である。実際に $c_1e_1 + c_2e_2 = o$ を満す c_1, c_2 は、自明な解である $c_1 = c_2 = 0$ 以外には存在しない。

例 18 V^3 の三つの要素 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, それに $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、互いに従属である (独立でない)²²。実際に $c_1 = -3, c_2 = 2, c_3 = 1$ とすれば、 $c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 x = o$ となる。

例 19 W の要素 $f = \cos x + \sin x$ と $g = \cos x - \sin x$ は互いに独立である。

3.4 基底

定義 10 (基底²³) 線型空間 V の n 個の要素 e_1, e_2, \dots, e_n が、次の二つの性質を満す時、この e_1, e_2, \dots, e_n の組を、 V の基底と呼び、「 $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ ²⁴」で表す。

- 1) e_1, e_2, \dots, e_n は独立である。
- 2) V の任意の要素は e_1, e_2, \dots, e_n の線型結合で表すことができる (e_1, e_2, \dots, e_n の張る空間、すなわち $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ ²⁵が V に等しい)。

この時、要素の順序は重要である。同じ要素からなっているも、並べる順序が異れば、異なる基底と考える ($\langle e_1, e_2 \rangle$ と $\langle e_2, e_1 \rangle$ は異なる基底)。

一般に要素の個数が多くなれば多くなるほど、それらが独立になるのが難しくなる。したがって、独立になるには、個数が少ない方がよい。その一方、要素の個数が多ければ多い程、その線型結合によって表現できる要素の個数が多くなるので、張るためには、要素の個数が多い方が良いことにある。つまり基底は、独立と、張るという二つの相反した要求に共に答えることができるという意味で、ギリギリの条件を満す要素の組であるといえる。

この様なギリギリの条件を満すがため、次のような良い性質も持つことになる。

定理 1 (基底による表現の一意性) e_1, e_2, \dots, e_n が V の基底ならば、 V の任意の要素 v は、 e_1, e_2, \dots, e_n の線型結合として一意に表すことができる。

例 20 V^3 の三つの要素 $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ は、 V^3 の基底になっている。

²²この様に、二つの要素だけなら独立だが、これに他の要素を加えて三つにすると従属になってしまうようなことがある。

一般に、互いに従属な要素の集合に任意の要素を加えても従属のままであり、また、互いに独立な要素の集合から一つの要素を取り除いても、残りは独立のままである。

²⁴「張る空間」と「基底」が、異なる意味なのにも変らず、同じ記号で表現されている事に注意。本当は混同しやすいので、別の記号を用いた方が良いのだが...

²⁵ここでは、 $\langle \dots \rangle$ を「張る」の意味で利用している (一つ前の脚注を参照の事)。

例 21 $M_{2,2}$ の四つの要素 $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ は、 $M_{2,2}$ の基底になっている。

例 22 W の二つの要素 $\langle \cos x + \sin x, \cos x - \sin x \rangle$ は、 W の基底になっている。

例 23 W の二つの要素 $\langle 2 \cos x, -\sin x \rangle$ は、 W の基底になっている。

3.5 正規直交基底

定義 11 (正規直交基底²⁶) 計量空間 V の基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ が次の二つの条件²⁷を満たす時、この基底は、正規直交基底であると言う。

正規性 $|e_i| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (全ての要素の長さが 1 である)

直交性 $(e_i, e_j) = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$) (互いに異なる要素は互いに直交している)

例 24 V^3 の三つの要素 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ は、 V^3 の正規直交基底になっている。

例 25 V^3 の三つの要素 $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ は、 V^3 の正規直交基底になっている。

例 26 W の二つの要素 $\left\langle \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}(\cos x + \sin x), \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}(\cos x - \sin x) \right\rangle$ は、 W の正規直交基底になっている。

3.6 次元

定義 12 (次元^{28,29}) 線型空間 V が有限個 n の要素からなる基底を持つ時、線型空間 V の次元は n (これを「 $\dim V$ 」で表す) であり³⁰、有限次元と呼ぶ。なお、有限個の基底が存在しない(基底が無数ある)場合は、無限次元と呼ぶ³¹。

²⁷これを、クロネッカーのデルタ ($\delta_{i,j}$) を用いて、単に一つの等式 $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) で表す事もある。

³⁰ V の基底は色々な場合がありうる。しかし、どの場合であってもその基底を構成する要素の個数は、常に一定である。その一定の個数 (n) が、その線型空間 V の次元となるわけである。

³¹無限であれ、有限であれ、 V が線型空間であれば、必ず、基底が存在する ($V = \{0\}$ の場合だけは例外だが..)。

例 27 V^3 の次元は 3 である。

例 28 $M_{2,2}$ の次元は 4 である。

例 29 W の次元は 2 である。

4 線型写像

4.1 線型写像の定義

定義 13 (線型写像³²) 二つの線型空間 V, V' の間の写像 T が、次の二つの条件 (この二つの条件を、線型性と呼ぶ) を満す時、この写像は、線型写像 であると呼ぶ。

$$1) T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$2) T(cx) = cT(x)$$

例 30 A を三次の実正方行列とする。空間ベクトルの集合 V^3 の要素 x に対して、 $T_A(x) = Ax$ と定義すれば、この写像 T_A (これは、 V^3 から V^3 の写像なので、変換になる) は、線型写像 (線型変換) となる。

例 31 W の要素 $f = a \cos x + b \sin x$ に対して、これを不定積分し、積分定数 C を 0 とするような写像 $I(f) = \int f dx$ を考える。これは、 W から W への変換になっている。実際、 $I(a \cos x + b \sin x) = \int a \cos x + b \sin x dx = -a \sin x + b \cos x \in W$ となる。これは線型性を満すので、線型写像 (線型変換) となる。

I の線型性は、次のようにして確認することができる。

$$\begin{aligned} I(f + g) &= \int (f + g) dx \\ &= \int f dx + \int g dx \\ &= I(f) + I(g) \\ I(cf) &= \int cf dx \\ &= c \int f dx \\ &= cI(f) \end{aligned}$$

4.2 同型対応と同型

定義 14 (同型対応³³) V から V' への線型写像 T が、全単写 (上への写像でかつ、一対一写像) の時、その変換 T は、 V と V' の間の同型対応 (同型写像) であると言う。

定義 15 (同型³⁴) V から V' の間に同型対応が存在する時に、 V と V' は同型であると言う。

二つの線型空間 V, V' の間に同型対応が存在するという事は、何時でも二つの世界を (線型性を保ったまま..) 行たり来たりできることを意味する。この様な状態では、二つの世界を区別せず、同じものと考えてよい (これを同一視と呼ぶ)。

4.3 基底による同型変換

定義 16 (自然な対応³⁵) 次元が n である K -線型空間 V に対して、基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ が与えられている。すると、 V から、 n 次元の列ベクトル全体の集合 K^n との間に、次のような自然な対応 φ が定まる³⁶。

$v \in V$ を考えると、 E が基底なので、ある c_1, c_2, \dots, c_n が一意に存在し、 $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$ と、 v が、 E の要素の線型結合で表現できる。この c_1, c_2, \dots, c_n に対して K^n の要素

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ を対応させる。

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n \leftrightarrow \varphi(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

自然な対応は、同型対応なので、次元が n の線型空間は、 K^n と同型である ということと言える³⁷。

5 後期試験に出る課題

5.1 基底の取り換え行列

定義 17 (基底の取り換え行列³⁸) n 次元の K -線型空間 V に対して、二つの基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ が与えられたとする。また、この時、それぞれ E, F によって定まる自然な対応を φ, ψ とする。

すると、同一の V の元、 v に対して、 K^n の元 $\varphi(v)$ と $\psi(v)$ が定まる。この二つの元の間に対応 ($T: \psi(v) \rightarrow \varphi(v)$) ³⁹は、 K^n から K^n への同型変換 ($T = \varphi \cdot \psi^{-1}$) となる。

K^n から K^n への線型写像には、それに対応する行列 P が存在し、 $T(x) = T_P(x)$ となるようにできる。

この行列 P を、基底の取り換え $E \rightarrow F$ の行列 と呼ぶ。

計算方法 1 (基底の取り換え行列の求め方) 二つの基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ に対する、基底の取り換え $E \rightarrow F$ の行列 $P = (p_{ij})$ は、次の関係式⁴⁰から、連立方程式を

³⁶これは、基底 E 定めると、自動的に決る事に注意。従って、基底を示す場合に、その構成する要素だけでなく、その自然な対応を対 $(E; \varphi)$ で指定する事も多い。

³⁷Text p.102 下から 9 行目の 定理 [3.7]

³⁹ $\varphi(v) \rightarrow \psi(v)$ ではなく、 $\psi(v) \rightarrow \varphi(v)$ であることに注意。

⁴⁰Text p.106 上から 10 行目の 式 (3)

解く事によって求める事ができる。

$$f_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j = p_{1i} e_1 + p_{2i} e_2 + \cdots + p_{ni} e_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

例 32 W の二つの基底 $E = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \cos x + \sin x, \cos x - \sin x \rangle$ と $F = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle 2 \cos x, -\sin x \rangle$ を考え、基底の取り換え $E \rightarrow F$ の行列 $P = (p_{ij})$ を求める。

まず、 f_1 について考える⁴¹と、

$$f_1 = \sum_{j=1}^2 p_{j1} e_j = p_{11} e_1 + p_{21} e_2$$

となる⁴²ので、これより、

$$2 \cos x = p_{11}(\cos x + \sin x) + p_{21}(\cos x - \sin x)$$

よって

$$2 \cos x = (p_{11} + p_{21}) \cos x + (p_{11} - p_{21}) \sin x$$

となる。これの $\cos x, \sin x$ の係数を比較すると、次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} 2 &= p_{11} + p_{21} \\ 0 &= p_{11} - p_{21} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} p_{11} &= 1 \\ p_{21} &= 1 \end{cases}$$

となる。

同様にして、 f_2 について考えると、

$$-\sin x = p_{12}(\cos x + \sin x) + p_{22}(\cos x - \sin x)$$

となり、

$$\begin{cases} 0 &= p_{12} + p_{22} \\ -1 &= p_{12} - p_{22} \end{cases}$$

⁴¹ F から考えることに注意。

⁴² p_{j1} ($j = 1, 2, \dots, n$) のように、左の添字が動く事に注意。

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} p_{12} = -\frac{1}{2} \\ p_{22} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。

これより、次のように P を求める⁴³ことができる。

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5.2 基底に関する線型写像の行列

定義 18 (基底に関する線型写像の行列⁴⁴) m 次元の K -線型空間 V から n 次元の K -線型空間 V' への線型写像 T を考える。更に、線型空間 V, V' に対して、それぞれ基底 $(E, \varphi), (F, \psi)$ を定める。

V の要素 v に対して、 $x = \varphi(v)$ は、 m 項列ベクトルとなり、 v を一旦、 T で写し (V' の元になる)、更に、それを ψ で変換した像 $y = \psi(Tv)$ は、 n 項列ベクトルとなる。この x と y を対応付けると、この写像 $(\psi \cdot T \cdot \varphi^{-1})$ は、線型写像になるため、それに対応する (m, n) 型行列 A が定まる。

この $A = (a_{ij})$ を、基底 $(E; \varphi), (F; \psi)$ に関する T の行列と呼ぶ。

計算方法 2 (基底に関する線型写像の行列) 線型写像 T の二つの基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$, $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ に関する行列は、次の関係式⁴⁵ から、連立方程式を解く事によって求める事ができる。

$$Te_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j = a_{1i} f_1 + a_{2i} f_2 + \dots + a_{ni} f_n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

例 33 W から W への線型変換 I の W の二つの基底 $E = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \cos x + \sin x, \cos x - \sin x \rangle$ と $F = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle 2 \cos x, -\sin x \rangle$ に関する行列 $A = (a_{ij})$ を求める。

まず、 e_1 から⁴⁶考える。

⁴³結果的、それぞれ求めた連立方程式の解を縦に並べることに注意。

⁴⁵Text p.114 上から 9 行目

⁴⁶ E に関して考える事に注意。

先ず I は積分なので、

$$I(e_1) = I(\cos x + \sin x) = \sin x - \cos x$$

となる。一方、

$$I(e_1) = \sum_{j=1}^2 a_{j1} f_j = a_{11} f_1 + a_{21} f_2$$

となる⁴⁷ので、これより、

$$\sin x - \cos x = 2a_{11} \cos x - a_{21} \sin x$$

となり、これの $\cos x, \sin x$ の係数を比較すると、次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} -1 = 2a_{11} \\ 1 = -a_{21} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a_{11} = -\frac{1}{2} \\ a_{21} = -1 \end{cases}$$

となる。

同様にして、 e_2 について考えると、

$$I(e_2) = I(\cos x - \sin x) = \sin x + \cos x$$

$$\sin x + \cos x = 2a_{12} \cos x - a_{22} \sin x$$

となり、

$$\begin{cases} 1 = 2a_{12} \\ 1 = -a_{22} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a_{12} = \frac{1}{2} \\ a_{22} = -1 \end{cases}$$

となる。

これより、次のように A を求める⁴⁸ことができる。

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

⁴⁷ a_{j1} ($j = 1, 2, \dots, n$) のように、左の添字が動く事に注意。

⁴⁸結果的に、それぞれ求めた連立方程式の解を縦に並べることに注意。

5.3 シュミットの直交化法

定義 19 (シュミットの直交化法⁴⁹) 計量空間 V の基底 $A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ が与えられた時、この基底に基づいて、 V の正規直交基底 $E = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ を求める事を考える⁵⁰。

次の手順に従って、与えられた基底 $A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ から、正規直交基底を求める方法をシュミットの直交化法と呼ぶ。

e_1 : \mathbf{a}_1 を正規化するだけ

$$\text{正規化 } \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}$$

e_2 : まず、射影を用いて直交化を行い、次に正規化を行う。

$$\text{直交化 } \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$$

$$\text{正規化 } \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2}{|\mathbf{a}'_2|}$$

e_3 : 上記と同様、ただし、引く要素が増えている。

$$\text{直交化 } \mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

$$\text{正規化 } \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a}'_3}{|\mathbf{a}'_3|}$$

e_r : 一般化

$$\text{直交化 } \mathbf{a}'_r = \mathbf{a}_r - (\mathbf{a}_r, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \dots - (\mathbf{a}_r, \mathbf{e}_{r-1})\mathbf{e}_{r-1}$$

$$\text{正規化 } \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{a}'_r}{|\mathbf{a}'_r|}$$

⁵⁰ V の基底が様々あるように、 V の正規直交基底も色々ある。したがって、単に「正規直交基底を求めよ」という問題だと、答が沢山出る事になる。「シュミットの直交化法」は、基となる基底 A から、一意に、ある特定な直交基底を求める方法であり、この場合、基底 A が定まれば、それからシュミットの直交化法を利用して作られる正規直交基底 E も、一通りに決る。