

# 基本変形

栗野俊一 \*

2008/07/14 (Ver. 1.1<sup>†</sup>)

## 1 基本変形

### 1.1 基本変形とは

行列の基本変形 (あるいは、基本操作) とは、行列の要素 (の行または列) に対して、次の 6 種類の操作の何れか一つの操作 (計算) を行うことである。

操作の対象が、行か列かによって二つに分類される。

- 行 (row) に対する操作

(左-1) 異なる二つの行を交換する ( $r_i \leftrightarrow r_j$ )。

(左-2) 一つの行を 0 以外の数で定数倍する ( $r_i \times c$ )。

(左-3) 一つの行に、他の行の定数倍を加算する ( $r_i + r_j \times c$ )。

- 列 (column) に対する操作

(右-1) 異なる二つの列を交換する ( $c_i \leftrightarrow c_j$ )。

(右-2) 一つの列を 0 以外の数で定数倍する ( $c_i \times c$ )。

(右-3) 一つの列に、他の列の定数倍を加算する ( $c_i + c_j \times c$ )。

対象が行 (基本行列を左からかける) か、列 (基本行列を右からかける) かを区別しなければ、操作の種類は、三通り (交換, 定数倍, 加算) あることが解る (図 1)。

### 1.2 基本変形の例

次の行列  $A$  をそれぞれ、基本変形した結果を考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

---

\*日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

<sup>†</sup>2008 年度 前期試験直前版

対象	操作	記号	内容	変化	基本行列
行	交換	$r_i \leftrightarrow r_j$	$i$ 行目と $j$ 行目を交換	$i$ 行目と $j$ 行目	左 $P_n(i, j)$
	定数倍	$r_i \times c$	$i$ 行目を $j$ 倍	$i$ 行目	左 $Q_n(i; c)$
	加算	$r_i + r_j \times c$	$i$ 行目に $j$ 行目を $c$ 倍して加算	$i$ 行目	左 $R_n(i, j; c)$
列	交換	$c_i \leftrightarrow c_j$	$i$ 列目と $j$ 列目を交換	$i$ 列目と $j$ 列目	右 $P_n(i, j)$
	定数倍	$c_i \times c$	$i$ 列目を $j$ 倍	$i$ 列目	右 $Q_n(i; c)$
	加算	$c_i + c_j \times c$	$i$ 列目に $j$ 列目を $c$ 倍して加算	$i$ 列目	右 $R_n(j, i; c)$

図 1: 基本操作の分類

### 1.2.1 行の変形

- 1 行目と 3 行目を交換した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (r_1 \leftrightarrow r_3)$$

- 2 行目を 2 倍した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (r_2 \times 2)$$

- 3 行目に 1 行目を (-3) 倍して加算した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (r_3 + r_1 \times (-3))$$

### 1.2.2 列の変形

- 1 列目と 2 列目を交換した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad (c_1 \leftrightarrow c_2)$$

- 3 列目を  $\frac{1}{3}$  倍した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad (c_3 \times \frac{1}{3})$$

- 1 列目に 2 列目を 2 倍して加算した結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 6 \\ 23 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (c_1 + c_2 \times 2)$$

### 1.3 基本変形と基本行列

基本変形の理論的な意味付けは、「基本変形とは基本行列をかけることである」という明言に尽きる。

即ち、ある行列  $A$  に特定な基本変形を施すということは、その変形に対応する基本行列を行列  $A$  にかける事と同じ結果<sup>1</sup>になる。

行列の積は、右からかける場合と左からかける場合で、一般に結果が異なる。したがって、同じ行列に、同一の基本行列をかける場合であっても、右からかけた場合と左からかけた場合は異なる意味となる。

具体的には、基本行列を 左からかけた場合は行の操作、右からかけた場合は列の操作 となる (図 2)。

	行 (左)	列 (右)
交換 ( $P$ )	左 $P_n(i, j)$	右 $P_n(i, j)$
定数倍 ( $Q$ )	左 $Q_n(i; c)$	右 $Q_n(i; c)$
加算 ( $R$ )	左 $R_n(i, j; c)$	右 $R_n(j, i; c)$

図 2: 基本行列のかける方向と操作の対象の関係

つまり、基本変形は、単なる行列のかけ算を行っているに過ぎない。

しかし、この基本行列には様々な性質<sup>2</sup>があり、この基本行列の性質が、基本変形の性質<sup>3</sup>を定めている。

しかし、計算を行う場合は、基本行列の事を忘れていても良いので、ここでは深く立ち入らない<sup>4</sup>ことにする (図 3)。

	基本変形	基本行列
用途	計算に利用する	証明に利用する
処理	早く計算できる	計算に時間がかかる
個々の操作	計算結果がイメージしやすい	計算結果がイメージしにくい
操作の制限	規則で覚える	考えれば解る

図 3: 基本変形と基本行列の得失

<sup>1</sup>同じ結果になるのであれば、なぜ、わざわざ、「基本変形」という新しい言葉を導入して、混乱するような事をするかと言えば、その理由は、効率である。端的に言えば、「基本行列のかけ算は、手間が多く、効率が悪い」が、「基本変形は(手間が多い事には変らないが、それでもかけ算に比較して..)、最小限の手間で済むので、効率が良い」からである。論理的な議論をするためには、基本行列を欠かせないが、計算をするだけなら基本変形(効率の良い方法)だけを身に付ければ良いことになる。

<sup>2</sup>例えば、基本行列は、全て正則で、しかも逆行列自身も基本行列になっているなど...

<sup>3</sup>例えば、基本変形は、その行列の rank を変更しないなど..。

<sup>4</sup>基本行列の性質を用いた、行列の様々な性質の証明は、講義で学ぶ。

## 2 基本変形の利用

### 2.1 基本変形による問題の解決

問題を解くために、基本変形を行うわけであるが、その変形を行って、何をすれば問題が解けた事になるか？ を、きちんと抑えておく必要がある。

端的に言えば<sup>5</sup>、最終的に、標準形 ( $F_{m,n}(r)$ ) の形にすることが目的となる。

これは別の言い方をすれば、対角要素は (可能な限り) 1 にする。その他の要素は、全て 0 にするという意味を意味する。

まずは、与えられた行列の要素に対して、基本変形のみを用いて、標準形にすることが結果的に、与えられた問題を解くことになる。

問題の解法の流れは、一般に次の様になる。

1. 与えられた問題を行列の形で表現する
2. 基本変形を利用して、行列を標準形にする (問題によって操作の範囲が異なる)
3. 標準形の結果によって、元の問題の答を決める (形によって答の形が変わる)

### 2.2 個々の基本変形の利用目的

基本変形には、6 種類 (対象が行、列 2 種類あり、操作の方法が 交換、定数倍、加算の 3 種類あるので、組み合わせで  $6 = 2 \times 3$  となる) がある。

これらの操作は、問題を解くにあたって、利用して良い物と悪い物があるが、利用して良い物は、どの様な目的でどの様な手順で利用しても最終的な結果は変わらないので、各自自由に利用して良いが 手順を誤ると操作数が増えてしまうので損をする 事になる。

従って、個々の操作は、次の様 (図 4) な目的に応じてどれを使うかを定めて置く方が良い<sup>6</sup>。

操作	対象	利用条件	利用目的
交換	対角要素	0	0 でない要素を探し、交換により 0 でなくする
定数倍	対角要素	1 でない	定数倍により 1 にする
加算	対角要素以外	0 でない	加算 を用いて 0 にする

図 4: 基本変形の利用制限

### 2.3 個々の基本変形の適用順序

基本変形の利用目的だけでなく適用順序も重要である。正しい順番で、基本操作を行えば、与えられた行列の要素は、段々と目的とする標準形の形 (すなわち、対角要素は 1、それ以外の要素は 0) になって行く。

<sup>5</sup>後に述べる様に、rank の計算や、行列式の計算では、上三角行列にした時点で、既に答が出ている。また、逆行列の場合、逆行列が存在しない時点で、計算を止めてよい (逆行列が存在する場合は最後まで計算するが、それでも左半分だけである)。連立方程式の場合も処理の対象が限定されている。

<sup>6</sup>逆に、ある程度、基本変形に慣れてきたら、このような制約を取り払って工夫 することにより、より短い手順や、間違いが少い手順で、問題が解けるようになる。しかし、最初は取りあえず、このような制約を設けた方が迷わずに済むという利点がある。

しかし、適用順序を誤ると、折角、1, 0 とした要素が、再び、目的と異った値になってしまうという現象が起き、二度手間になってしまう。

そこで、基本変形の手順も、次の様な順序で行う事に決めて置く<sup>7</sup>と、二度手間にならない事が保証されるので良い。

(前進消去) 左から右、上から下へと、対角要素を 1 にしながら、左下の要素を全て 0 にする。具体的には  $i$  を 1 から順番にふやししながら、以下の作業を繰り返す。

1.  $i$  番目の対角要素を 1 にする。このために、以下の作業を行う。

(枢軸選び)  $i$  番目の対角要素が 0 の場合

(a)  $i$  番目の対角要素の下に 0 でない要素を探す。もし、 $j (> i)$  番目の要素  $(a_{ji})$  が 0 でなければ、行の交換  $(r_i \leftrightarrow r_j)$  を行う。

(列の操作が許されていない (逆行列/行列式の計算の) 場合) 枢軸選びは、直ちに失敗となる。

(列の操作が許されている場合) 更に右下に 0 でない要素を探す。

i.  $i$  番目の対角要素の右に 0 でない要素を探す。もし、 $k (> i)$  番目の要素  $(a_{ik})$  が 0 でなければ、列の交換  $(c_i \leftrightarrow c_k)$  を行う。

ii. 右下の要素の中で 0 でない要素を探す。もし、 $j (> i), k (> i)$  番目の要素が 0 でなければ、行の交換  $(r_i \leftrightarrow r_j)$  と列の交換  $(c_i \leftrightarrow c_k)$  を行う。

iii.  $i$  番目の対角要素の右下 (同じ行、列を含む) に 0 でない要素がみつからなければ、枢軸選びは失敗となり、この時点で前進消去の作業は終了となる。

(正規化)  $i$  番目の対角要素  $(a_{ii})$  が 1 以外の場合は、行の定数倍  $(r_i \times \frac{1}{a_{ii}})$  を利用して 1 にする。

2.  $i$  列目を払う:  $i$  番目の対角要素を軸に、 $i$  列の下要素を払う。具体的には  $j$  を  $i+1$  から下端に達するまで、増やししながら  $j, i$  要素  $(a_{ji})$  を行の加算  $(r_j + r_i \times (-a_{ji}))$  を利用して 0 に変えて行く。

問題による処理の違い: 問題によって、この時点で答が出る事があるので、注意する。

rank この時点で作業を終えて良い。rank は、1 にすることができた対角要素の個数である。

逆行列 途中で枢軸選びが失敗したら、逆行列は存在しないので、ここで止めて良い。逆に、下端まで 1 が並んだ場合は作業を続ける。

方程式 この時点で作業が止ることはないので作業を進める。

行列式 この時点で作業を終えて良い。途中で枢軸選びに失敗したら、行列式の値は 0 であり、そうでなければ、ここまで計算した結果<sup>8</sup>が、そのまま行列式の値 (求める答) となる。

(後退代入) 1 となった対角要素を軸にして、右から左、下から上へと右上の要素を全て 0 にする。

前進消去によって 1 から  $k$  番目までの対角要素が 1 となり、その右下の部分が 零行列になっ

<sup>7</sup>繰り返しになるが、慣れてくれば、その適用順序も自分で考えて工夫することにより、より速く、あるいは簡単に計算ができようになる。

<sup>8</sup>値の計算方法は、別資料で詳細を説明する。

ている (これが前進消去が終了する条件だった) ので  $k$  番目の対角要素の上の要素を 0 に変えて行く作業となる。具体的には、 $i$  を  $k$  とし、1 になるまで減らしながら、以下の様にして  $i$  列を払う。

1.  $i$  列目を払う :  $i$  番目の対角要素を軸に、 $i$  列の上の要素を払う。具体的には  $j$  を  $i-1$  とし、1 になるまで減らしながら、 $j, i$  要素 ( $a_{ji}$ ) を行の加算 ( $r_j + r_i \times -a_{ji}$ ) を利用して 0 に変えて行く。

以下は、5 行 5 列の場合の操作の手順である (図 5)。

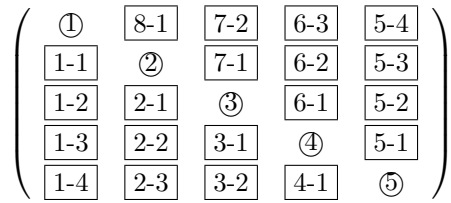


図 5: 基本変形の対象となる要素の順番

更に重要な点は、この手順で考えれば、操作内容の詳細が、次の様に 機械的に定まる という利点である (図 6)。

操作対象	条件	操作	基本行列	操作の内容
$a_{i,i}$	$a_{i,i} = 0 \wedge a_{j,k} \neq 0 (i \leq j, i \leq k)$	$c_i \leftrightarrow c_j, r_i \leftrightarrow r_k$	左 $P_n(i, j)$ , 右 $P_n(i, k)$	$a_{i,i}$ を 0 以外にする
$a_{i,i}$	$a_{i,i} \neq 0 \wedge a_{i,i} \neq 1$	$c_i \times \frac{1}{a_{i,i}}$	左 $Q_n(i; a_{i,i})$	$a_{i,i}$ を 1 にする
$a_{j,k} (j \neq k)$	$a_{j,k} \neq 0$	$c_j + c_k \times -a_{j,k}$	左 $R_n(j, k; -a_{j,k})$	$a_{j,k}$ を 0 にする

図 6: 操作対象による基本変形の決定

## 2.4 rank の計算の実例

具体的な行列  $A$  を対象にして、rank の計算を行ってみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

### 1. 前進消去

(a)  $i$  を 1 にする。

- i.  $a_{ii} = a_{11}$  を 1 にすることを考えるが、既に  $a_{11} = 1$  なので、ここでは何もしない

(b)  $a_{ii} = a_{11}$  をかなめに、その下の要素を払う。

- i.  $j$  を  $i+1 = 1+1 = 2$  とする。

- ii.  $a_{ji} = a_{21} = 4$  の値を 0 にするために、列の加算 ( $r_j + r_i \times (-a_{ji}) = r_2 + r_1 \times (-4)$ ) を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} [r_2 + r_1 \times (-4)]$$

- iii.  $j$  を 1 増やす ( $j = 3$  となる)。

- iv.  $a_{ji} = a_{31} = 7$  の値を 0 にするために、列の加算 ( $r_j + r_i \times (-a_{ji}) = r_3 + r_1 \times (-7)$ ) を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} [r_3 + r_1 \times (-7)]$$

- (c)  $i$  を 1 増やす ( $i = 2$  となる)。

- i.  $a_{ii} = a_{22} = (-3)$  を 1 にすることを考える。  
 ii. これは、0 でないが 1 でもないので、列の定数倍 ( $r_i \times \frac{1}{a_{ii}} = r_2 \times \frac{1}{-3}$ ) を行って 1 にする。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} [r_2 \times \frac{1}{-3}]$$

- (d)  $a_{ii} = a_{22}$  をかなめに、その下の要素を払う。

- i.  $j$  を  $i + 1 = 2 + 1 = 3$  とする。  
 ii.  $a_{ji} = a_{32} = (-6)$  の値を 0 にするために、列の加算 ( $r_j + r_i \times (-a_{ji}) = r_3 + r_2 \times 6$ ) を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [r_3 + r_2 \times 6]$$

- (e)  $i$  を 1 増やす ( $i = 3$  となる)。

- i.  $a_{ii} = a_{33} = 0$  を 1 にすることを考える。  
 ii.  $a_{ii}$  が 0 の時には、その要素の右あるいは下の要素で 0 でない要素を探す必要がある (枢軸選び)。  
 iii. ところが、枢軸は見付からない (枢軸選びに失敗する) ので、ここで、基本変形は終了。

2. 1 の個数 (あるいは、 $i - 1$  の値) が 2 なので、行列  $A$  の rank は 2 となる。

### 3 基本変形によって解ける問題

基本変形によって、解くことができる問題には以下の様な物がある。

- rank (階数) の計算
- 逆行列
- 連立方程式
- 行列式

ただし、問題によって、使ってはいけない操作や、使っても良いが、使った場合は気を付ける必要がある操作がある (図 7)。

問題	左			右			備考
	交換	定数倍	加算	交換	定数倍	加算	
rank (階数)							基本的に何を使ってもよい
逆行列				×	×	×	停止したら逆行列はない
連立方程式					×	×	列の交換利用時、最後に変数の交換が必要
行列式 (値)	-1	1/c	1	-1	1/c	1	基本的に何を使ってもよい 行列式の外に出る定数

この利用を推奨する

どうしても必要な場合だけ利用する

利用可能だが、利用しなくてもよい

× 利用できない (してはいけない)

図 7: 問題毎での利用可能な操作

## 4 計算ミスをさけるには..

例えば、rank や行列式の計算では、どの基本操作を利用しても良いが、逆に、逆行列では、左 (行) の操作しか許されない。変わり種は、連立方程式で、列の交換ができないと解けない問題があり、どうしても必要ならば、列の交換を利用するが、その場合は、最後の答を出す時に、変数名の交換が必要になるので面倒である。したがって、可能な限り、列の交換も使わない方がよい。

一般に、基本変形を行う場合は、可能でも列の操作を利用しない習慣をつけるとよいだろう。そうすれば、連立方程式以外は全て、同一の方法で解くことができる。連立方程式も、列の交換をたまに利用するだけだ。

行列式の計算では、更に、分数の定数倍 ( $Q_n(i; \frac{1}{c})$ ) に使用も避けた方がよい。なぜなら、これを利用すると、計算の途中に分数が現れて、計算ミスの原因になるからだ。

元々の行列の要素が全て整数であれば、ユークリッドの互除法を巧く利用する事により、行列の計算は、分数計算を一切使わずに求める事ができる。



## 5 確かめ算をしよう

逆行列と、連立方程式は、確かめ算ができる。したがって、答を求めたら、必ず、確かめ算をすること。

基本変形の問題は、計算量が多いので、計算ミスは避けられないといってもよい。したがって、もちろん、できるだけミスが生じないようにするのは当然としても、確かめ算をすることによって、そのミスが発見できる。

途中のちょっとした計算ミスのために、回答がまるまる不正解になるのでは泣ききれない。