基本変形による問題の解法 (簡易版)

栗野俊一 *

2008/07/17 (Ver. 0.1†)

1 基本変形による問題の解法

1.1 手順

基本変形によって問題を解く場合、その手順は、大雑把に以下のような流れになる。

定式化 与えられた問題から、基本操作の対象となる行列を作る。

標準化 基本操作を用いて、標準化を行う。ここでは更に、問題による次の二点違いに注意する必要がある。

　終了条件 どのような状態になったら、操作を終えてよいか

　操作条件 列の交換をおこなってよいかどうか

答案化 標準化の結果を用いて、最初の問題の答を作る

1.2 標準化

標準化は、対象となる行列の要素に着目し、基本操作を順番に適用することよって実現できる。ポイントは次の二つである。

- 操作する要素の順番は、左上から右下に向って、対角要素を 1 にしながら、その要素の下を 0 にし (前進消去)、それが済んだら、今度は、右上の要素を 0 にする操作 (後退消去) をすることにし、次の順番 (図 1) に**固定**して考える。
- 操作する要素の位置 (対角線かどうか) と、その要素の値 (0 か 1 か それ以外か) によって、操作内容を次に規則 (図 2) に**従って** 行う。

* 日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>
† 2008 年度 前期試験直前版

$$\begin{pmatrix} ① & \boxed{8\text{-}1} & \boxed{7\text{-}2} & \boxed{6\text{-}3} & \boxed{5\text{-}4} \\ \boxed{1\text{-}1} & ② & \boxed{7\text{-}1} & \boxed{6\text{-}2} & \boxed{5\text{-}3} \\ \boxed{1\text{-}2} & \boxed{2\text{-}1} & ③ & \boxed{6\text{-}1} & \boxed{5\text{-}2} \\ \boxed{1\text{-}3} & \boxed{2\text{-}2} & \boxed{3\text{-}1} & ④ & \boxed{5\text{-}1} \\ \boxed{1\text{-}4} & \boxed{2\text{-}3} & \boxed{3\text{-}2} & \boxed{4\text{-}1} & ⑤ \end{pmatrix}$$

図 1: 基本変形の対象となる要素の順番

操作対象	条件	操作	基本行列	操作の内容
$a_{i,i}$	$a_{i,i} = 0 \wedge a_{j,k} \neq 0 (i \leq j, i \leq k)$	$c_i \leftrightarrow c_j, r_i \leftrightarrow r_k$	左 $P_n(i,j)$, 右 $P_n(i,k)$	$a_{i,i}$ を 0 以外にする
$a_{i,i}$	$a_{i,i} \neq 0 \wedge a_{i,i} \neq 1$	$c_i \times \frac{1}{a_{i.i}}$	左 $Q_n(i; a_{i,i})$	$a_{i,i}$ を 1 にする
$a_{j.k} (j \neq k)$	$a_{j.k} \neq 0$	$c_j + c_k \times -a_{j.k}$	左 $R_n(j,k; -a_{j.k})$	$a_{j.k}$ を 0 にする

図 2: 操作対象による基本変形の決定

2　rank の計算

2.1　計算の手順

「rank の問題」とは、「与えられた行列 A の rank を計算しなさい」という形の問題である。

定式化 基本操作を行う行列は、問題で与えられた行列 A そのものである。

標準化 rank の計算では、次のようになる。

　終了条件 前進消去が済んだら終り

　操作条件 列の交換を行ってよい

答案化 標準化の結果を用いて、最初の問題の答を作る

2.2　具体例

次の行列 A の rank を計算しなさい

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

定式化 基本操作の対象は、問題で与えられた行列 A そのものである。

$$\text{標準化の対象}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

標準化 次の形で、前進消去を行う。途中で、列の交換も利用してよい。

1. 既に、一番左上の対角要素 a_{11} が 1 なので、その下の要素を 0 にする。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 対角要素 a_{22} が 1 でないので、列の定数倍で、1 にする。
左 Q(2;−1) ; 2 行目を −1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. その下の要素を 0 にする。
左 R(3,2;−2) ; 3 行目に 2 行目を −2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. これ以上、対角の要素はないので、これで、作業は終了。

答案化 対角にならんだ 1 の個数が rank になるので $\mathrm{rank}\, A = 3$ となる。

3 逆行列の計算

3.1 計算の手順

「逆行列の問題」とは、「与えられた行列 A の 逆行列 A^{-1} を計算しなさい」という形の問題である。

定式化 基本操作を行う行列は、問題で与えられた行列 A と単位行列 E を横に並べた 行列 $(A|E)$ である。

標準化 逆行列では次のようになる。

終了条件 枢軸選びに失敗するか、後退消去まで終るまで

操作条件 列の交換は利用できない

答案化 標準化の結果を用いて、最初の問題の答を作る

3.2　具体例

次の行列 A の逆行列を求めなさい

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定式化 基本操作の対象は、問題で与えられた行列 A と単位行列を横に並べたものである。

$$\text{標準化の対象}: \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

標準化 次の形で、前進消去も後退消去も両方行う。途中で、列の交換は使えない。

1. 対角要素 a_{11} が 1 でないので 1 にする。

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左 Q(1;−1) ; 1 行目を −1 倍

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. 対角要素の下の要素を 0 にする。
左 R(2,1;−4) ; 2 行目に 1 行目を −4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素 a_{22} が 1 でないので 1 にする。
左 Q(2;$\frac{1}{7}$) ; 2 行目を $\frac{1}{7}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. 対角要素の下の要素を 0 にする。
   左 R(3,2;6) ; 3 行目に 2 行目を 6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{array}\right)$$

4. 対角要素 a_{33} を 1 にする。
   左 Q(3;7) ; 3 行目を 7 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

5. ここまで対角要素を全て 1 にできたので、今度は、対角要素の上の要素を 0 にする。
   左 R(2,3;$\frac{1}{7}$) ; 2 行目に 3 行目を $\frac{1}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

   左 R(1,2;3) ; 1 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

6. ここまでで左半分が標準化 (単位行列に) できたので、作業終了

答案化 最終結果の右半分を取り出して、答えとする。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$