

# 連立一次方程式の解法

栗野俊一 \* <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

2009/07/09 版

## 1 $n$ 元連立一次方程式

定義 1 ( $n$  元連立一次方程式)  $n$  元連立一次<sup>1</sup>方程式とは、次のような、 $n$  個の変数  $x_1, \dots, x_n$  に対して、それぞれ、係数  $a_{i,j}$  を掛けて加えた結果に関する方程式<sup>2</sup>を  $m$  個連立<sup>3</sup>させたもの (式 1) を指す。

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

例えば、次は、3 元の連立方程式の例である。

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 & = -1 \\ & 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \end{cases}$$

定義 2 (連立方程式の解) この連立方程式 (式 1) を解く ということは、この方程式を満すような値の組、すなわち、

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = e_1 \\ x_2 = e_2 \\ \vdots \\ x_n = e_n \end{cases}$$

となる、 $e_1, \dots, e_n$  を求めることであり、これが、(式 1) を満す、すなわち、(式 1) に、(式 3) の結果を代入 ( $x_i$  に  $e_i$  を代入) した、次の等式 (式 4) が全て成立しなければならない。

---

\*日本大学理工学部数学科

<sup>1</sup>(式 1) は見ての通り、変数  $x_i$  に関する一次式になっている。

<sup>2</sup>方程式というのは、二つの式を等号で結んだ式の事を呼ぶ。

<sup>3</sup>変数の個数  $n$  と方程式の本 (個) 数  $m$  は別々に与えられる。高校までは、通常  $m = n$  の場合にしか扱わなかったが、大学では、 $n$  と  $m$  は独立に与えられる。 $m$  と  $n$  だけからは、解の個数を予想することができないが、 $m < n$  であれば確実に、一通りの解にはならない (解がないか、解が無数にあるかのどちらかになる) ことは知っておいて良いであろう。

$$(4) \begin{cases} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n = d_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n = d_2 \\ \vdots \\ a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n = d_m \end{cases}$$

ただし、このような  $e_i$  の組み合わせが存在しない可能性もあるし、また、 $e_i$  が何らかのパラメータ変数を含む定数でない式である可能性もあることに注意。

実際に、(式 2) を解いた場合の答は、次の通りになり、

$$(5) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

これを実際に、(式 2) を代入した結果は、以下の通りになる。

$$(6) \begin{cases} 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1 \\ \quad \quad \quad 2 \times 2 - 3 = 1 \\ 1 + \quad \quad 2 + 3 = 6 \end{cases}$$

これは、全ての等式が成立しており、この結果、少くとも、(式 5) が (式 2) の解の一つである<sup>4</sup> ことが確認できる。

## 2 方程式の解法の概要と注意点

連立方程式解くための大まかな手順と、その手順に於ける注意点は、次の通りである。手順の詳細と、具体的な注意点の内容に関しては、後述するが、手順の流れと、注意すべき点を予め把握しておくが良い。

1. 与えられた方程式から拡大係数行列を作る。
2. 拡大係数行列を標準化する。
  - (a) 標準化の対象は、係数行列部分である（すなわち、最右の列は標準化の必要はない）。
  - (b) 基本操作は、可能な限り、行の操作で行う。
  - (c) やむを得ない場合は、列の交換を行う。但し、最右の列（ $n+1$  列目）は交換してはいけない。また交換するならばできるだけ右にある列と交換すれば、交換回数が少なくてすむ。
  - (d) 列の交換を行った場合は、最後に答えを作成するために必要なので記録しておく。
3. 標準化された結果を用いて、解の分類を行う。

<sup>4</sup>逆に言えば、この結果を見ただけでは、「他には解がない」ということは「確認できない」ことになる。「(式 1) を解く (答を求める)」ということは、「(式 1) を満たすような全ての解を求める」ことであることに注意しよう。

- (a) 係数行列の rank  $r$  が変数の個数  $n$  より小さい場合は、解が一意に定まらない。この時、高校までは、「解は不定」でよかったが、大学では、「解をパラメータで表記」しないといけない点に異なることに注意。

4. 解の形に合せて、答を作成する。

- (a) 拡大係数行列を標準化する場合に、もし、列の交換を行った場合は、その交換に従って、変数名の置き換えが必要になるので、標準化の時の交換の記録に従い、変数名の交換を行う。

5. 最後に、与えられた答を、元の方程式に代入して、確かに、解になっていることを確認する。

### 3 方程式の解法の詳細

#### 3.1 拡大係数行列

与えられた方程式 (式 1) を解く最初の手順は、拡大係数行列を作成することである。この作業は、単純で、簡単に言えば、方程式の中から、変数  $x_i$  と、等号 (=)、そして、加法の記号 (+) を取り除いたものである (ただし、 $-$  は、係数の符号と考え、また、変数が現れない場合は、係数 0 があるものとして扱う。 )。

$$(7) \quad \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array} \right)$$

拡大係数行列は、係数部分 ( $a_{ij}$ ) と、定数部分 ( $d_i$ ) からなるので、これを区別を容易するために、区切の縦線を入れてあるが、行列としては、この縦線を無視しても良い。

例えば、(式 2) に対応する拡大係数行列は、次のようになる。

まず、与えられた連立方程式を、式中に現れない変数に関しては、0 の係数を補い、引き算の部分は、負数の係数を持つ形にし、全て明示的に係数が指定された  $n$  個の変数を含む加算の形にする。

$$(8) \quad \begin{cases} 3x_1 + (-2)x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 \end{cases}$$

後は、変数  $x_i$  と、+、= の記号を取り除いて、両辺をカッコで囲めば、拡大係数行列となる。

$$(9) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

## 3.2 拡大係数行列の標準化

### 3.2.1 標準化での留意点

次の作業は、拡大係数の標準化を行う。この標準化に当っては、次の点に注意する。

1. 標準化の対象は、係数部分のみ（最右の列以外の部分。最右の列は、他の要素と一緒に操作はするが、標準化する必要はない）。
2. 操作は、可能な限り行の操作で行う。
3. 行の操作だけでは標準化できない場合のみ、行の交換を行う。交換を行う場合は、できるだけ右の列と交換を行うが、最右の列とは交換してはいけない。
4. 列の交換を行った場合は、最後に答を作る場合に必要なので、記録しておく。

### 3.2.2 標準化の実例

(式 2) の場合

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \quad \text{一行目と二行目を交換} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -19 \end{array} \right) \quad \text{三行目から一行目の 3 倍を引く} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array} \right) \quad \text{三行目の二倍目の 2 倍を加える} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{二行目と三行目を交換} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{二行目に (-1) をかける} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{一行目から二行目を引く} \\ \text{三行目から二行目の 2 倍を引く} \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{三行目を (-11) でわる。} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{一行目に三行目の 4 倍を加える} \\ \text{二行目から三行目の 5 倍を引く} \end{array} \\ \text{標準化終了} \end{array}$$

この例では、列の操作は一切、行っていない。また、最右の列は、標準化の対象ではないので、これ以上の操作は不要である。

### 3.3 解の分類

拡大係数行列の標準化が済んだら、次は、その標準化された拡大係数行列の形に基き、解の形の分類を行う。

#### 3.3.1 標準化された拡大係数行列の一般形

(式 1) の拡大係数を標準化した場合の一般的な形は、次のようになる。

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1,r+1} & \cdots & p_{1,n} & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{2,r+1} & \cdots & p_{2,n} & f_2 \\ & & 0 & 1 & & 0 & p_{3,r+1} & \cdots & p_{3,n} & f_3 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 & p_{r,r+1} & \cdots & p_{r,n} & f_r \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_m \end{array} \right)$$

あるいは、区分けを使って、

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} E_r & | & P_{r,n-r} & | & f_r \\ \hline \text{---} & + & \text{---} & + & \text{---} \\ O_{m-r,r} & | & O_{m-r,n-r} & | & g_{m-r} \end{array} \right)$$

ここで、 $E_r (r \geq 0)$  は、 $r$  次元の単位行列、 $O_{i,j}$  は、 $i$  行  $j$  列の零行列、 $A_{i,j}$  は、 $i$  行、 $j$  列の行列、 $f_i, g_i$  は、 $i$  次元の縦ベクトルである。

(式 2) の場合は、

$$\begin{aligned} E_r &= E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P_{r,n-r} &= P_{3,0} = \text{なし} \\ f_r &= f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ O_{m-r,r} &= O_{0,3} = \text{なし} \\ O_{m-r,n-r} &= O_{0,0} = \text{なし} \\ g_{m-r} &= g_0 = \text{なし} \end{aligned}$$

となっている。

### 3.3.2 解の形の分類と判定方法

解の形の分類と判定方法は次のようになっている。

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{m-r} \text{が } 0 \text{ ベクトルでない} \\ f_{m-r} \text{が } 0 \text{ ベクトル} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} r < n & \cdots \text{ 解なし} \\ r = n & \cdots \text{ 解は無数にある} \\ & \cdots \text{ 解は一通り} \end{array} \right.$$

### 3.4 答の形式

答の形式は、前節の解の形によって異なる。

#### 3.4.1 解なしの場合

この場合は、高校までと同様、「解なし」あるいは、「不能」<sup>5</sup> でよい。

#### 3.4.2 解が無数にある場合

この場合、高校では、「不定」と答えてよかったが、大学では、これは許されない。大学では、この場合、パラメータ形式で答える必要がある。

もし、この段階で、「不定」と答えた場合は、答が殆んどできているにも関わらず、ほぼ 0 点しかつかない。具体的には、まず次の形で一旦、形式的に答を作る。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1 - p_{1,r+1}\alpha_{r+1} - p_{1,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{1,n}\alpha_n \\ x_2 = f_2 - p_{2,r+1}\alpha_{r+1} - p_{2,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{2,n}\alpha_n \\ \cdots \\ x_r = f_r - p_{r,r+1}\alpha_{r+1} - p_{r,r+2}\alpha_{r+2} - \cdots - p_{r,n}\alpha_n \\ x_{r+1} = \alpha_{r+1} \\ \cdots \\ x_n = \alpha_n \end{array} \right.$$

$\alpha_{r+1} \sim \alpha_n$  はパラメータ変数となる。

更に、もし、途中で、列の操作をおこなっており、 $i$  列目と  $j$  列目を交換した場合は、 $x_i$  と  $x_j$  の変数だけを交換する (右辺の式はそのまま)。これを、列の操作を行った回数<sup>6</sup>だけ、繰り返す。

この変数の交換を行わないと、結果的に答は誤りであり、点数は半減することを覚悟する必要がある<sup>7</sup>。

<sup>5</sup>これを、時々「不定」と書く学生がいるが、これは当然、(大学でも、高校でも) 誤りである。また、高校時代には、次に述べるように「不定」が正解となる場合があるが、大学では、それでは不十分である。すなわち、「大学の場合は、『不定』が答になることはない(『不定』と書いたら常に誤り)」と言える。

<sup>6</sup>もし、可能な限り、行の操作だけを使い、列の操作も最右列でない、できるだけ右の列と交換したのであれば、どの変数も、高々一度しか交換されないはずである。もし、同じ変数を二度以上交換する必要がある場合は、標準化に戻って、考え直す必要がある。

<sup>7</sup>そうならないためにも、確かめを行うこと。

### 3.4.3 解が一つの場合

この場合は、高校の時と同様、次のような形で、定数値が答となる。

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_2 = f_2 \\ \dots \\ x_n = f_n \end{cases}$$

ただし、上記と同様に、もし、途中で、列の操作を行っており、 $i$  列目と  $j$  列目を交換した場合は、 $x_i$  と  $x_j$  の変数だけを交換する（右辺の式はそのまま）。これを、列の操作を行なって回数だけ、繰り返す。

この変数の交換を行わないと、結果的に答は誤りであり、点数は半減する。

### 3.5 確かめ算

解が不定の場合は、確かめ算するのは難しいが、解が存在する場合は、得られた解を、元の方程式に代入し、等号が成立することを確認することによって、確かめ算が可能となる。

特に、不定の場合は、文字式のまま代入して確認する方が確度が高い。

ただし、気を付けて欲しいのは、この確かめ算では、解が間違っている場合には、等号が成立しないので、その間違いを発見できるが、等号が全て成立しても、それしか解がないかどうかは判らないので、確かめ算が成功しても、それが真の答かどうかは確認できない<sup>8</sup> 事に注意する。

もし、どうしても確認したい場合は、rank の計算などと同様、別の紙で、もう一度計算し直して、それと比べるしかない。

---

<sup>8</sup>したがって、確実に確かめ算の出来る逆行列の問題は、いかに貴重というか...