

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [問題] (2009/06/25)

問. 次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 3 \\ -5 & -8 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [解答] (2009/06/25)

A.1

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{3})$; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2, 1; 1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3, 1; -2)$; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(4, 1; -1)$; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(5, 1; -1)$; 5 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1, 2; \frac{1}{3})$; 2 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

右 $R(1, 3; \frac{1}{3})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{3}{2})$; 2 行目を $\frac{3}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3; 2; \frac{1}{3})$; 3 行目に 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

左 $R(4; 2; \frac{2}{3})$; 4 行目に 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

左 $R(5; 2; -\frac{1}{3})$; 5 行目に 2 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2, 3; 2)$; 3 列目に 2 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2, 1; -1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;-2) ; 5 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-1) ; 2 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;1) ; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; $\frac{1}{3}$) ; 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 R(5,2;-1) ; 5 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3; $\frac{1}{3}$) ; 3 列目に 2 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
 左 $Q(3,3)$; 3 行目を 3 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
 列を掃き出します。

左 $R(5,3;\frac{2}{3})$; 5 行目に 3 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
 列を掃き出します。

左 $R(2,1;1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;1)$; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
 列を掃き出します。

左 $R(2,1;2)$; 2 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;1)$; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 $P(2,3)$; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3行目に2行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1行目と2行目を交換

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1,1/2) ; 1行目を 1/2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,1;1) ; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,4;1) ; 4列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;1) ; 5列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,3) ; 1行目と3行目を交換

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{4})$; 1 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(4,1; -4)$; 4 行目に 1 行目を -4 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;1)$; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{3}{4})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{3}{4}$ 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.7

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 3 \\ -5 & -8 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素
を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を
みつけたので、それを対角要素と交換し
ます。

左 $P(1,2)$; 1 行目と 2 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -5 & -8 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{5})$; 1 行目を $\frac{1}{5}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -5 & -8 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,1;2)$; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -5 & -8 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;5) ; 4行目に1行目を5倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;1) ; 5行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-\frac{8}{5}) ; 2列目に1列目を-\frac{8}{5}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;\frac{6}{5}) ; 3列目に1列目を\frac{6}{5}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(3,2)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2行目と3行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;-\frac{5}{4}) ; 2行目を-\frac{5}{4}倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 R(5,2;-\frac{3}{5}) ; 5行目に2行目を-\frac{3}{5}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{3}{4})$; 3 列目に 2 列目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

対角要素 $(3, 3)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(5, 3)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(3,5)$; 3 行目と 5 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3,4)$; 3 行目を 4 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.8

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{2})$; 1 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -3 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;3)$; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;\frac{3}{2})$; 2 列目に 1 列目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;1) ; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;-\frac{3}{2}) ; 4 列目に 1 列目を -\frac{3}{2} 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;-\frac{1}{2}) ; 5 列目に 1 列目を -\frac{1}{2} 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;2) ; 2 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;\frac{1}{2}) ; 3 行目に 2 行目を \frac{1}{2} 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;-3) ; 4 列目に 2 列目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5;5) ; 5 列目に 2 列目を 5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 4) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(3,4) ; 3 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,5;1) ; 5列目に3列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 4

A.9

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2行目に1行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;1) ; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;3) ; 2列目に1列目を3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;-2) ; 3列目に1列目を-2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2; $\frac{1}{3}$) ; 2行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,2;4)$; 3行目に2行目を4倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 3列目に2列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,3)$; 3行目を3倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.10

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1行目を-1倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;2)$; 2行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-3)$; 3行目に1行目を-3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;1)$; 3列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,2;1)$; 3行目に2行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;1) ; 3列目に2列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.11

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,1;-1) ; 3行目に1行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-3) ; 2列目に1列目を-3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;2) ; 3列目に1列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,2;3) ; 3行目に2行目を3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.12

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;1/3) ; 1行目を1/3倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -4 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(2,1;4) ; 2行目に1行目を4倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;1) ; 2列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;-\frac{2}{3}) ; 3列目に1列目を-\frac{2}{3}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;-\frac{2}{3}) ; 4列目に1列目を-\frac{2}{3}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,3)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,3) ; 2列目と3列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;-\frac{3}{4}) ; 2行目を-\frac{3}{4}倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;-1) ; 3行目に2行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;\frac{5}{4}) ; 4列目に2列目を\frac{5}{4}倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

対角要素(3,3)が0なので、0でない要素を探したところ、(3,4)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(3,4) ; 3列目と4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;4) ; 3 行目を 4 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3