

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [問題] (2009/07/02)

問. 次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.13

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.14

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.15

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.16

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -9 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.17

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.18

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [解答] (2009/07/02)

A.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 $(1, 1)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(2, 1)$ に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1,2)$; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{1}{3})$; 2 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-8)$; 3 行目に 2 行目を -8 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;3)$; 3 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;4)$; 1 行目に 2 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{5})$; 1行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1; -2)$; 2行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1; 1)$; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,2; 1)$; 4行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4; 5)$; 4行目を5倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4; \frac{3}{5})$; 1行目に4行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4; -\frac{6}{5})$; 2行目に4行目を $-\frac{6}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4; \frac{3}{5})$; 3行目に4行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3; 1)$; 1行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3; 2)$; 2行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;1) ; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;1) ; 3 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(2,3;1) ; 2 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A.4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{1}{2})$; 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;1)$; 3 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; \frac{2}{5})$; 3 行目を $\frac{2}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;1)$; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(4;5)$; 4 行目を 5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 $R(1,4;-1)$; 1 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-1)$; 2 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{4}{5})$; 3 行目に 4 行目を $\frac{4}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;3)$; 1 行目に 3 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{5}{2})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-1)$; 1 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

A.5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{4}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1; -1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;4) ; 2 行目を 4 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3; $\frac{3}{4}$) ; 1 行目に 3 行目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;5) ; 2 行目に 3 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{1}{4}$) ; 1 行目に 2 行目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A.6

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;-1) ; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/2) ; 2 行目を 1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-1) ; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;1) ; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;2/17) ; 3 行目を 2/17 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;5/2) ; 4 行目に 3 行目を 5/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{6}{17} & \frac{5}{17} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;17) ; 4 行目を 17 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4;1); 1行目に4行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{1}{2}$); 2行目に4行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{3}{17}$); 3行目に4行目を $\frac{3}{17}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(2,3; $-\frac{1}{2}$); 2行目に3行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 17 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2); 1行目と2行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;2); 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;-1); 4行目に1行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-2); 3行目に2行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;3); 4行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4;1) ; 1行目に4行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;-1) ; 2行目に4行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;3) ; 3行目に4行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(2,3;1) ; 2行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A.8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2行目に1行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-1) ; 3行目に1行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;1/3) ; 2行目を1/3倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;1)$; 3行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3;3)$; 3行目を3倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-2)$; 1行目に3行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -9 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 2行目に3行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -9 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;3)$; 1行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A.9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3行目に1行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(3,2)に0でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2行目と3行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1行目に3行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;3)$; 2行目に3行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;1) ; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A.10

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & -5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;1/5) ; 1 行目を 1/5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;3) ; 2 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;2) ; 4 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/2) ; 2 行目を 1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,2;3) ; 4 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{13}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-5/4) ; 3 行目を -5/4 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{13}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-11/10) ; 4 行目に 3 行目を -11/10 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{11}{8} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;8) ; 4 行目を 8 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4; $-\frac{1}{5}$) ; 1行目に4行目を $-\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & 0 & -1 & -\frac{12}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{7}{10}$) ; 2行目に4行目を $\frac{7}{10}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & 0 & -1 & -\frac{12}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{9}{2} & \frac{89}{10} & \frac{77}{10} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{3}{4}$) ; 3行目に4行目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & 0 & -1 & -\frac{12}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{9}{2} & \frac{89}{10} & \frac{77}{10} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3; $-\frac{2}{5}$) ; 1行目に3行目を $-\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -3 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{9}{2} & \frac{89}{10} & \frac{77}{10} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

左 R(2,3; $-\frac{1}{10}$) ; 2行目に3行目を $-\frac{1}{10}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -3 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;1) ; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 6 \\ 6 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

A.11

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & -2 & -9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1; $\frac{1}{5}$) ; 1行目を $\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;1) ; 4行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
左 $Q(2; \frac{5}{3})$; 2 行目を $\frac{5}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。
左 $R(3,2;1)$; 3 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2; \frac{2}{5})$; 4 行目に 2 行目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
左 $Q(3; \frac{3}{2})$; 3 行目を $\frac{3}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。
左 $R(4,3; \frac{1}{3})$; 4 行目に 3 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
左 $Q(4;2)$; 4 行目を 2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。
3 列目を掃き出します。
左 $R(1,4;-1)$; 1 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4; \frac{3}{2})$; 3 行目に 4 行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。
左 $R(1,3; \frac{9}{5})$; 1 行目に 3 行目を $\frac{9}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{48}{5} & \frac{22}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3; \frac{4}{3})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{4}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{48}{5} & \frac{22}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 11 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{2}{5}$) ; 1 行目に 2 行目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 14 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 11 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 4 & 14 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

A.12

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;2) ; 2 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(2,3;2) ; 2 行目に 3 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

A.13

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 5 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;1) ; 4 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/5) ; 2 行目を 1/5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,2;7) ; 4 行目に 2 行目を 7 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{7}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-1) ; 3 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{7}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-2) ; 4 行目に 3 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} & 2 & \frac{7}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;5) ; 4 行目を 5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;-1) ; 1 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 0 & -13 & -10 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;2/5) ; 2 行目に 4 行目を 2/5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 0 & -13 & -10 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;1) ; 3 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 1 & 0 & -13 & -10 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;-1) ; 1 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 0 & 0 & -24 & -19 & -14 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;5) ; 1 行目に 2 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 10 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 11 & 9 & 7 & 5 \\ 12 & 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

A.14

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; -1/3) ; 2 行目を -1/3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-1) ; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3,3) ; 3 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;2) ; 1 行目に 3 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;4/3) ; 2 行目に 3 行目を 4/3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;-1) ; 1 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -1 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{3})$; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;2)$; 2 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,1;-2)$; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;3)$; 2 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,2;\frac{1}{3})$; 4 行目に 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;-1)$; 3 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;-1)$; 4 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{1}{3})$; 1 行目に 4 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;2)$; 2 行目に 4 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;1)$; 3 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3; $\frac{5}{3}$) ; 1 行目に 3 行目を $\frac{5}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;4) ; 2 行目に 3 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{1}{3}$) ; 1 行目に 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.16

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{5}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;3) ; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;-4) ; 4 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3; $-\frac{5}{3}$) ; 3 行目を $-\frac{5}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3; $-\frac{2}{5}$) ; 4 行目に 3 行目を $-\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;3)$; 4行目を3倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{1}{5})$; 1行目に4行目を $\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-\frac{1}{5})$; 2行目に4行目を $-\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{4}{3})$; 3行目に4行目を $\frac{4}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-\frac{2}{5})$; 1行目に3行目を $-\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{5})$; 2行目に3行目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A.17

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{5})$; 1行目を $\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;8)$; 2行目に1行目を8倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{9}{10} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{9}{10} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{11}{10} & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;3) ; 4 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{9}{10} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{11}{10} & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{14}{5} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/2) ; 2 行目を 1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{11}{10} & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{14}{5} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;3) ; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{10} & 2 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{14}{5} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;-4) ; 4 行目に 2 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{10} & 2 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -3 & -\frac{13}{5} & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-2) ; 3 行目を -2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -3 & -\frac{13}{5} & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-4/5) ; 4 行目に 3 行目を -4/5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;5) ; 4 行目を 5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(2,4;-1) ; 2 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{2} & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;4) ; 3 行目に 4 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{2} & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;\frac{3}{5})$; 1行目に3行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 18 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{2} & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{9}{10})$; 2行目に3行目を $\frac{9}{10}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 18 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 18 & 12 \\ 5 & 3 & 19 & 13 \\ 8 & 5 & 30 & 20 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

A.18

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{2})$; 1行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2行目に1行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;-2)$; 3行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(3,2)に0でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2行目と3行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3;2)$; 3行目を2倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-\frac{5}{2})$; 1行目に3行目を $-\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;3)$; 2行目に3行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;2)$; 1行目に2行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$