

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [問題] (2009/07/02)

問. 次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 (A/B) 計算演習 [解答] (2009/07/02)

A.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,3) ; 1 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;1) ; 5 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-9) ; 2 行目に 1 行目を -9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;6) ; 4 行目に 1 行目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-1) ; 2 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;2) ; 3 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;-2) ; 4 列目に 1 列目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;1) ; 5 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 18 & -19 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; - $\frac{1}{2}$) ; 2 行目を - $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & \frac{19}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,2;-1) ; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & \frac{19}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;9) ; 3 列目に 2 列目を 9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(2,4;- $\frac{19}{2}$) ; 4 列目に 2 列目を - $\frac{19}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5;1) ; 5 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;2) ; 4 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 4

A.3

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; -1/8) ; 1 行目を -1/8 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 3 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-3) ; 2 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 9 & 5 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-9) ; 3 行目に 1 行目を -9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-5/8) ; 2 列目に 1 列目を -5/8 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;7/8) ; 3 列目に 1 列目を 7/8 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;-1/4) ; 5 列目に 1 列目を -1/4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; 8/9) ; 2 行目を 8/9 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{5}{8})$; 3行目に2行目を $\frac{5}{8}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{11}{9})$; 3列目に2列目を $\frac{11}{9}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

右 $R(2,5;-\frac{2}{9})$; 5列目に2列目を $-\frac{2}{9}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,9)$; 3行目を9倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 $R(3,5;1)$; 5列目に3列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;1)$; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-1)$; 3行目に1行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;1)$; 3列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.5

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-3) ; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;2) ; 4 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;-1) ; 5 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;1) ; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;1) ; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{1}{2})$; 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3; 2; -6)$; 3 行目に 2 行目を -6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(4; 2; 5)$; 4 行目に 2 行目を 5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(5; 2; -2)$; 5 行目に 2 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(5; 3; 1)$; 5 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(1, 1)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(2, 1)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1, 2)$; 1 行目と 2 行目を交換

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{4})$; 1 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,1;-5)$; 3 行目に 1 行目を -5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;2)$; 4 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;\frac{1}{4})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;\frac{1}{2})$; 4 列目に 1 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;-\frac{1}{4})$; 5 列目に 1 列目を $-\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2 行目と 3 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
 左 $Q(2; -\frac{1}{2})$; 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
 列を掃き出します。

左 $R(4,2;-1)$; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、
 加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{5}{8})$; 3 列目に 2 列目を $\frac{5}{8}$ 倍して、
 加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;\frac{5}{4})$; 4 列目に 2 列目を $\frac{5}{4}$ 倍して、
 加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,5;-\frac{5}{8})$; 5 列目に 2 列目を $-\frac{5}{8}$ 倍して、
 加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素
 を探したところ、(4, 3) に 0 でない要素を
 みつきましたので、それを対角要素と交換し
 ます。

左 $P(3,4)$; 3 行目と 4 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3,8)$; 3 行目を 8 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
 行を掃き出します。

右 $R(3,4;-2)$; 4 列目に 3 列目を -2 倍して、
 加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(3,5;1) ; 5 列目に 3 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.7

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,2) ; 1 列目と 2 列目を交換

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; -1/2) ; 1 行目を -1/2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,3;1/2) ; 3 列目に 1 列目を 1/2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 R(2,3;1) ; 3 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;2) ; 3 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 5) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,5) ; 1 列目と 5 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;3) ; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;-4) ; 4 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,3) ; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;-1) ; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,2;3) ; 4 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

A.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;1) ; 4列目に2列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 4) に 0 でない要素をみつきましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,4) ; 3行目と4行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 P(3,4) ; 3列目と4列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 2) に 0 でない要素をみつきましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,2) ; 1列目と2列目を交換

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 R(3,1;2) ; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;1)$; 4 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

左 $R(5,1;-2)$; 5 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,4;-1)$; 4 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;2)$; 5 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。行を掃き出します。

右 $R(2,4;4)$; 4 列目に 2 列目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(3,3)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(3,4)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 $P(3,4)$; 3 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;\frac{1}{3})$; 3 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 $R(4,3;-4)$; 4 行目に 3 行目を -4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

左 R(5,3;3) ; 5 行目に 3 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,5; $\frac{1}{3}$) ; 5 列目に 3 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4; $-\frac{1}{4}$) ; 4 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(5,4;-1) ; 5 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(4,5; $\frac{1}{12}$) ; 5 列目に 4 列目を $\frac{1}{12}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(5;12) ; 5 行目を 12 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 5

A.10

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(2,1;-3) ; 2行目に1行目を-3倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;2) ; 3行目に1行目を2倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;-2) ; 4行目に1行目を-2倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;2) ; 2列目に1列目を2倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素
を探したところ、(3,2)に0でない要素を
みつけたので、それを対角要素と交換し
ます。

左 P(2,3) ; 2行目と3行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2行目を-1倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(4,2;-1) ; 4行目に2行目を-1倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(1, 1)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(2, 1)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1,2)$; 1 行目と 2 行目を交換

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-2)$; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;1)$; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(2, 2)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(4, 2)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,4)$; 2 行目と 4 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,1;2)$; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-1)$; 4行目に1行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

左 $R(5,1;-1)$; 5行目に1行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;-1)$; 3列目に1列目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;1)$; 4列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;-1)$; 5列目に1列目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(2;\frac{1}{2})$; 2行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,2;-2)$; 3行目に2行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;2)$; 4行目に2行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,4;\frac{1}{2})$; 4列目に2列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,5;-1)$; 5列目に2列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3;\frac{1}{3})$; 3行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(5,3;2)$; 5行目に3行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3,5;1)$; 5列目に3列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3