代数学幾何学 A/B 演習 (2009/05/21) 問 5 の答

問題 5　　複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. **Q.** $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

   A. 両辺共に非負なので、二乗して確認する。$\alpha = a+bi, \beta = c+di$ とすると、

$$
\begin{aligned}
& (\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 \\
= \; & (|\alpha|+|\beta|)^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
= \; & (|a+bi|+|c+di|)^2 - |(a+bi)+(c+di)|^2 \\
= \; & (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2 - |(a+c)+(b+d)i|^2 \\
= \; & ((a^2+b^2)+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(c^2+d^2)) - ((a+c)^2+(b+d)^2) \\
= \; & ((a^2+b^2)+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(c^2+d^2)) - ((a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bd+d^d)) \\
= \; & 2(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - (ac+bd))
\end{aligned}
$$

従って、元の不等式を示すには、

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd$$

を示せばよい。ここで、左辺は常に非負なので、右辺が負の場合は、常に成立する。そこで、右辺が非負の場合を考える。この場合、両辺が、非負なので、両辺を二乗して確認する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\
&= (a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2) - (a^2c^2+2abcd+c^2d^2) \\
&= (bc)^2 - 2(bc)(ad) + (ad)^2 \\
&= (bc-ad)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

よって、左辺 $\geq$ 左辺

よって、与えられた不等式が成立する。等号が成立するのは、$bc-ad=0$ の時、すなわち、$\alpha = k\beta (k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in R)$ の場合である。

2. **Q.** $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

A. 右辺は、常に非負なので、左辺が負の場合は、常に、成立する。そこで、左辺が非負の場合を考える。この場合、両辺が、非負なので、両辺を二乗して確認する。$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ とすると、

$$
\begin{aligned}
& (\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 \\
= \ & |\alpha - \beta|^2 - (|\alpha| - |\beta|)^2 \\
= \ & |(a+bi) - (c+di)|^2 - (|a+bi| - |c+di|)^2 \\
= \ & |(a-c) + (b-d)i|^2 - (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2 \\
= \ & ((a-c)^2 + (b-d)^2) - ((a^2+b^2) - 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + (c^2+d^2)) \\
= \ & ((a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bd + d^d)) - ((a^2+b^2) - 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + (c^2+d^2)) \\
= \ & 2(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - (ac+bd))
\end{aligned}
$$

従って、元の不等式を示すには、

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac + bd$$

を示せばよい。ここで、左辺は常に非負なので、右辺が負の場合は、常に成立する。そこで、右辺が非負の場合を考える。この場合、両辺が、非負なので、両辺を二乗して確認する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\
&= (a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2) - (a^2c^2 + 2abcd + c^2d^2) \\
&= (bc)^2 - 2(bc)(ad) + (ad)^2 \\
&= (bc - ad)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

よって、左辺 $\geq$ 左辺

よって、与えられた不等式が成立する。等号が成立するのは、$bc - ad = 0$ の時、すなわち、$\alpha = k\beta (k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in R)$ の場合である。