代数学幾何学 A/B 演習 (2009/04/09)

問題 1　任意の実数に対して、次の不等式の性質

(a) 任意の二つの実数 $x, y (x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して、$x > y$, $x = y$, $x < y$ の内のいずれか一つが、必ず成立する。

(b) $a > b$ の時、$x > 0$ ならば $ax > bx$ であり、$x < 0$ ならば $ax < bx$ である。

が、成り立つこと利用して、以下の問いに答えよ。

1. 任意の実数 x に対して、$x^2 \geq 0$ (ただし $x^2 = 0$ なのは $x = 0$ の時) を示せ。
2. i を虚数単位 (すなわち、$i^2 = -1$) とすると、i は、実数でない ($i \notin \boldsymbol{R}$ である) ことを示せ。

問題 2　複素数の演算 (和・積) の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\gamma = e + fi$ $(a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R})$ に対し、次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いたかも示せ。

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (加法についての結合法則)
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (加法についての交換法則)
3. $\alpha + 0 = \alpha$ (加法についての単位元)
4. $\alpha + (-1)\alpha = 0$ (加法についての逆元の存在)
5. $\alpha\beta = \beta\alpha$ (乗法についての交換法則)
6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (乗法についての単位元の存在)
7. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (分配法則)
8. $\alpha\delta = 1$ となる複素数 δ が存在する。(ただし、$\alpha \neq 0$ の時) (乗法の逆元の存在)

問題 3　虚部が 0 でない複素数 $z = x + yi \quad (x, y \in \boldsymbol{R}, y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数[1] $\bar{z}$ であることを示せ。

[1] 複素数 $z = x + yi \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して、その虚部の正負を入れ替えた複素数 $z' = x - yi$ を z との**共役複素数**と呼び $\bar{z}$ で表す。例えば、$3 - 2i$ の共役複素数は、$\overline{3 - 2i} = \overline{3 + (-2)i} = 3 + 2i$ となる。

問題 4　α, β を任意の複素数とするとき、次の式が実数となることを示せ。

$$1.\quad \alpha+\overline{\alpha},\quad 2.\quad \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta,\quad 3.\quad (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}).$$

問題 5　複素数 $\alpha,\ \beta$ に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\mathrm{R}e(\alpha\pm\beta)=\mathrm{R}e(\alpha)\pm\mathrm{R}e(\beta)$ [2]
2. $\mathrm{I}m(\alpha\pm\beta)=\mathrm{I}m(\alpha)\pm\mathrm{I}m(\beta)$ [3]
3. $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$
4. $|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha-\beta|$

問題 6　複素数 α に対して、次の問いに答えなさい。

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ。
2. 複素数 $\alpha\neq 0$ が純虚数 (実部が 0 で、虚部が 0 でない複素数) であるための必要十分条件は $\alpha=-\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 7　複素数の絶対値と共役複素数についての次の性質を証明せよ。

1. $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$,
2. $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$,
3. $\overline{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{\overline{\alpha}}$,
4. $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$,
5. $\mid\overline{\alpha}\mid=\mid\alpha\mid$,
6. $\alpha\overline{\alpha}=\mid\alpha\mid^2$,
7. $\mid\alpha\beta\mid=\mid\alpha\mid\mid\beta\mid$,
8. $\mid\frac{1}{\alpha}\mid=\frac{1}{|\alpha|}$,
9. $\mid\alpha^n\mid=\mid\alpha\mid^n\ (n\in\boldsymbol{N})$

問題 8　次の問いに答よ。

1. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。
2. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は純虚数であることを示せ。

問題 9　実数 a,b,c,d についての等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

を複素数 $\alpha,\ \beta$ についての等式

$$\mid\alpha\mid\mid\beta\mid=\mid\alpha\beta\mid$$

をもちいて導け。

[2]複素数 $z=x+yi\,(x,y\in\boldsymbol{R})$ に対して、x を、z の **実部** と呼び、 $\mathrm{R}e(z)$ で表す。例えば $\mathrm{R}e(3-2i)=\mathrm{R}e(3+(-2)i)=3$ である。

[3]複素数 $z=x+yi\,(x,y\in\boldsymbol{R})$ に対して、y を、z の **虚部** と呼び、 $\mathrm{I}m(z)$ で表す。例えば $\mathrm{I}m(3-2i)=\mathrm{I}m(3+(-2)i)=-2$ である。

問題 10　$\alpha = 1+i, \beta = 2-i$ とする時、次の問に答えなさい。

1. 複素数 $\gamma = 4+i$ を、二つの実数 a, b と複素数 α, β を利用して、$\gamma = a\alpha + b\beta$ と表せたとする。この時、実数 a, b を求めなさい。

2. 一般に複素数 $\delta = x + yi \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$ が与えられた時、この複素数 δ を、複素数 α, β と、実数 p, q を用いて、$\delta = p\alpha + q\beta$ と表せる時に、この p, q を x, y を用いて表せ。

3. 二つの複素数 z_1, z_2 に対して、一方が他方の実数倍でない (即ち、任意の実数 c に対して $z_1 \neq cz_2$ かつ、 $z_2 \neq cz_1$ である) 時、「任意の複素数 z 対して、ある実数 u, v が存在し、$z = uz_1 + vz_2$ と表せる」ことを示せ。

問題 11　二次方程式 $x^2 + px + q = 0\,(p, q \in \boldsymbol{R})$ が複素数解 $a + bi \quad (a, b \in \boldsymbol{R}, b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

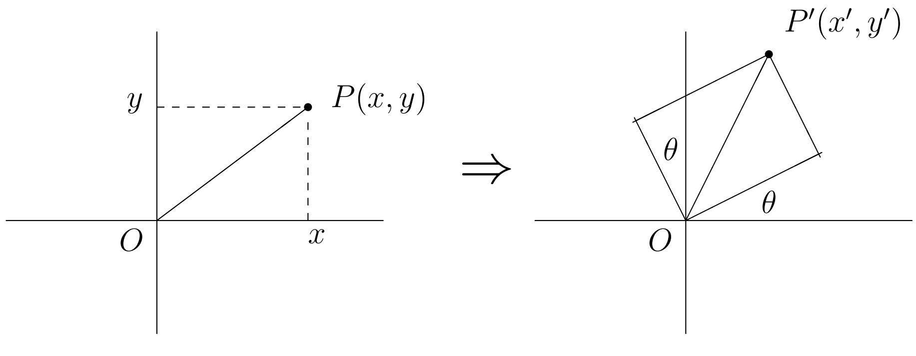
問題 12　実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が複素数解 $a + bi \quad (a, b \in \boldsymbol{R}, b \neq 0)$ を持つならば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 13　次の問いに答えよ。

1. 三次方程式 $x^3 + 3px + q = 0$ の根を α, β, γ としたとき、$(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q の多項式で表わせ。

2. $f(x) = x^3 + 3px + q$ としたとき，$f(x) = 0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x) = 3x^2 + 3p$ が互いに素ではない[4] ことを示せ。また，この条件を p, q の多項式を用いて表せ。

問題 14　座標平面上の点 $P(x, y)$ を原点を中心に、反時計回りに θ (単位はラジアン) だけ、回転移動した点 P' の座標 (x', y') を x, y, θ で表す式[5]を、次の図を用いて導け。



[4] 二つの多項式 $f(x), g(x)$ に対して、一次以上の多項式 $h(x)$ が存在し、$f(x), g(x)$ が共に、この多項式 $h(x)$ で割切れるならば、この二つの多項式 $f(x), g(x)$ は**素でない** と言う。この時、$h(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の**共通因数**と呼ぶ。なお、この様な $h(x)$ が存在しなければ、$f(x)$ と $g(x)$ は **素である**と言う。

[5] もちろん、$\sin, \cos$ を利用する。

問題 15　次の問いに答えよ。

1. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を y 軸に関し対称移動した点の座標を x,y を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y=x$ に関し対称移動した点の座標を x,y を用いて表せ。
3. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 原点に関し対称移動した点の座標を x,y を用いて表せ。

問題 16　座標平面上の点 $P(x,y)$ を原点を中心に反時計回りに $-\theta$ 回転移動した点を $P_1(x_1,y_1)$, $P_1(x_1,y_1)$ を x 軸に関し対称移動した点を $P_2(x_2,y_2)$, $P_2(x_2,y_2)$ を原点を中心に θ 回転移動した点を $P'(x',y')$ とする。

1. x_1,y_1 を x,y,θ を用いて表せ。
2. x_2,y_2 を x_1,y_1 を用いて表せ。
3. x',y' を x_2,y_2,θ を用いて表せ。
4. x',y' を x,y,θ を用いて表せ。

問題 17　座標平面上の直線 $y=mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. m を θ を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y=mx$ に関し線対称移動した点の座標を x,y,m を用いて表せ。

問題 18　次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1.　$a=12345654321, b=1234321$,　2.　$a=832040, b=2584$,　3.　$a=2^{30}-1, b=2^{18}-1$.

問題 19　問題 18 のそれぞれの問に対し、d を a と b の最大公約数とした時，$ax+by=d$ となる整数 x,y を一組求めよ。

問題 20　互いに素な正整数 a,b と整数 $0\le r<a$ と $0\le s<b$ が与えられている。
このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 21　a,b の最大公約数を d とし，整数 x_0,y_0 は $ax_0+by_0=d$ を満すとする。このとき，$ax+by=d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x=x_0+\frac{bt}{d},\ y=y_0-\frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。