代数学幾何学 A/B 演習 (2009/04/16)

問題 22　多項式 $f(x)$ を $x-a$, $x-b$ $(a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りを求めよ。

問題 23　次の不等式を証明せよ。

1. $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2} \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)} + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ (三角不等式)

問題 24　Text (p.3) の定理 [1.1]、並びに 定理 [1.2] は、図形的に証明を行っている行っているが、空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、それぞれ以下のような成分を用いて、表現されているとして、これらを成分の計算の立場から証明しなさい。 (注意: 何れの定理も三つの等式からなるが、それを全て示すこと)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1. 定理 [1.1] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。
2. 定理 [1.2] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

問題 25　[零ベクトルの一意性] $\boldsymbol{o}$ を零ベクトルとするとき、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$ が成立する[1]が、逆に、このような性質を持つベクトルは、零ベクトルだけであることを示せ (すなわち、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}'=\boldsymbol{a}$ となるベクトル $\boldsymbol{o}'$ は、零ベクトル $\boldsymbol{o}$ である)。

問題 26　[逆ベクトルの一意性] $-\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルとすると、$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{o}$ は零ベクトル) が成立する[2]が、逆に、ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、それを加えると零ベクトルになるベクトルは、$-\boldsymbol{a}$ だけであることを示せ (すなわち、ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{o}$ となるベクトル $\boldsymbol{a}'$ は、$\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル $-\boldsymbol{a}$ である)。

問題 27　Text (p.6) の定理 [1.3] の内積の性質の内、(7), (8), (9) を、空間ベクトルの成分表示を用いて示せ。

[1] Text (p.3) の定理 [1.1]
[2] Text (p.3) の中段。

問題 28　[向きと大きさ] 零ベクトルでない任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、長さが 1 の平面ベクトル $\boldsymbol{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ と正の実数 c を用いて $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}_\theta$ と一意に表現できることを示せ。

問題 29　空間ベクトルの三つの基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、任意の空間ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は、この三つの基本ベクトルの線型和

$$\boldsymbol{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

で表現できることは学んだ (Text p.5) が、この表現が一意であることを示せ。(ヒント：$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ の様に、表現できると仮定すると、実は、$x = x', y = y', z = z'$ が成立することを示せばよい)

問題 30　空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、次の問いに答えなさい。

1. この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。
2. 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、この基本ベクトルと内積を用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, e_1)e_1 + (\boldsymbol{v}, e_2)e_2 + (\boldsymbol{v}, e_3)e_3$$

問題 31　三角形 ABC に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ を、それぞれ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と表すとき、次の問いに答えなさい。

1. 一般に、二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。
2. 三角形 ABC が直角三角形 ($\angle C$ を直角) である時、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることと、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(すなわち $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$) を利用して、ピタゴラスの定理 (三平方の定理) を証明しなさい。