代数学幾何学 A/B 演習 (2009/04/23)

問題 32　次の問いに答えなさい。

1. 三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。
2. 二等辺三角形 ABC (ただし、AB = AC とする) に対して、$\angle A$ の角の二等分線と、底辺 BC の交点を P とする時に、実は、P は、底辺 BC を二等分することを、ベクトルの長さと内積を用いて示せ。(ヒント : $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AP}$ とすれば、前小問の結果が利用できる。後は、$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ であることを利用すれば...)

問題 33　次の平面幾何学の問題 (内心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の角の二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の内接円の中心であることを示せ。

問題 34　次の平面幾何学の問題 (外心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の辺の垂直二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の外接円の中心であることを示せ。

問題 35　点 U を通り、0 ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 l と、その直線上にない点 Q から、直線 l への垂線の足を H とした時に、線分 QH の長さが、点 Q と、直線 l の距離になっていることを示せ。(ヒント : 直線 l 上の点を P としたとき、Q と l の距離とは、線分 PQ の最小値のことである。)

問題 36　三次元空間の二つの直線 ℓ_1, ℓ_2 がそれぞれ、点 P_1, P_2 (その位置ベクトルは、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする) を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に平行である時、この二つの直線の距離を、ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて表せ。

問題 37　次を証明しなさい。

1. ある空間ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満すならば、実は、$\boldsymbol{z}$ が 0 ベクトルであることを示せ。
2. ある二つの空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ があり、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$ を満すならば、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることを示せ。

問題 38　二つの空間ベクトルの $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ がそれぞれ次のように成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

この時、この二つのベクトルの内積が、成分を用いて、次のようになることは学んだ (Text p.6 の (2) 式)。

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

これを次の事実を用いて導け。

- 空間ベクトルの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 に関してだけは、内積を次の様に定義する[1]。

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$$

- 内積の性質 (Text p.6 の定理 [1.3] (7) - (9))。
- 任意の空間ベクトルは、単位ベクトルの線型結合で表すことができる (Text p.5)。

問題 39　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{V}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$,　(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,　(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 40　$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

[1] この定義に用いられる記号 $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号** (Text p.35 参照) と呼ぶ。