代数学幾何学 A/B 演習 (2009/05/07)

問題 41　二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号 「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ 」で定義する (つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする)。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a &= e \\ b &= f \\ c &= g \\ d &= h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

問題 42　A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y}) \\ (cA)\boldsymbol{x} &= A(c\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 43　A, B を $(2, 2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば

   $$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

   $$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

   となることを証明せよ。

2. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 44　二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した (Text p.16)。これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 45　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。

2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$\begin{array}{rclcrcl} (a+bi)+(c+di) & = & e+fi & \Leftrightarrow & (aE+bJ)+(cE+dJ) & = & eE+fJ, \\ (a+bi)(c+di) & = & e+fi & \Leftrightarrow & (aE+bJ)(cE+dJ) & = & eE+fJ. \end{array}$$

3. $(4E-3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。

4. $(aE+bJ)(cE+dJ) = (cE+dJ)(aE+bJ)$ であることを示せ。

問題 46　座標平面を原点を中心にして、反時計まわりに θ 回転移動したとき、点 $P(x, y)$ の移る先の点を $P(x', y')$ とする。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線型写像であることを示せ。

問題 47　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 48　$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{0}$ (零ベクトル) でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への**射影子**[1] とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T' = T$ となることを示せ[2]。

問題 49　行列 A が、ある直交する $\boldsymbol{0}$ (零ベクトル) でない二つ平面ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と、0 でない二つの実数 p, q に対して、次の式を満すとする。

$$\begin{cases} A\boldsymbol{a} & = & p\boldsymbol{a} \\ A\boldsymbol{b} & = & q\boldsymbol{b} \end{cases}$$

この時、次の性質を持つ二つの行列 T, S が存在することを示せ。

$T^2 = T$, $S^2 = S$
$TS = ST = O$　　(O は、零行列)
$T + S = E$　　(E は、単位行列)
$A = pT + qS$

(ヒント:T, S をそれぞれ、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ への射影子とすれば、Text p.19 の問 2. が利用できる。後は、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が独立であり、任意の平面ベクトルが、この二つのベクトルの線型和で表すことが出来る[3]事を利用すれば. . . [あるいは、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = (AE)\boldsymbol{x} = A(E\boldsymbol{x}) = A((T+S)\boldsymbol{x}) = \ldots$ として...])

---

[1] Text p.19

[2] このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

[3] $T + S = E$ なので、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し、$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (T+S)\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + S\boldsymbol{x}$ が成立する。ところが、$T\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$, $S\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b}$ なので、$\boldsymbol{x}$ が、$(\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} + \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b})$ と、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の線型和で表現できる。