代数学幾何学 A/B 演習 (2009/05/14)

【定義】*(***集合が演算に関して閉じている***)* ある集合 S とその要素の関する二項演算 $\oplus$ が与えられた時に、「S の任意の要素 x, y に対して、演算結果 $x \oplus y$ が定義されており、その結果が再び S の要素になる ($\forall x, y \in S[x \oplus y \in S]$) 」ならば、「S は、演算 $\oplus$ に関して**閉じている**」と言います。そして、そうでない場合は「**閉じていない**」と言います。例えば、自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は、加法演算 $+$ に関して閉じています (任意の自然数を二つ (x, y) とってきて、その和 $(x+y)$ を求めると、また自然数になる) が、減法演算 $-$ に関しては閉じていません (例えば、4 と 7 は自然数だが、 4 - 7 は自然数でない)。また、偶数全体の集合 E は、加法演算 $+$ に関して閉じています (任意の偶数の和はまた、偶数になる) が、奇数の集合 O は、同じ加法演算 $+$ に関して閉じていません (奇数と奇数の和は偶数になる、つまり奇数にならない)。この様に、「閉じている・いない」は、与えられた集合と演算の関係で決ることが解ります[1]。

問題 50

1. 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、有理数の集合全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も和、差、積に関して閉じていることを示せ。

2. 実数 $\boldsymbol{R}$ が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ が和、差、積に関して閉じていることを示せ。

問題 51

1. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から、0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(=\boldsymbol{Q}-\{0\}=\{x|x \in Q, x \neq 0\})$ とする時、$\boldsymbol{Q}^*$ は、乗算と除算の両方で閉じていることを示せ。ただし、$\boldsymbol{Z}$ が加減乗算に関して閉じていることを利用してよい。

2. 同様にして、上記の $\boldsymbol{Q}^*$ は、加算に関して閉じていないことを示せ。

3. 正の有理数全体の集合 $Q^+=\{x|x \in Q, x>0\}$ は加算、乗算、除算に関して閉じていることを示せ。

問題 52 　複素数の実部と虚部が共に正であるような集合を $\boldsymbol{C}^+(=\{x+yi|x, y \in \boldsymbol{R}, x>0, y>0\})$ とする時に、次の問いに答えなさい。

1. $\boldsymbol{C}^+$ は、和に関して閉じていることを示せ。

2. $\boldsymbol{C}^+$ は、積に関して閉じていないことを示せ。

---

[1] 一般に、自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ が、和、積に関して閉じていること、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が、和、差、積に関して閉じていることも、それぞれ証明できるが、それらを示すには、それぞれ自然数や実数に関する定義に立ち戻って証明する必要があるので、普通は成立するものとして扱う。それに対して、整数、有理数、複素数全体の集合 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C}$ が和、差、積に関して閉じていることは、自然数や、実数が閉じていることを利用して簡単に示すことができる (以下の課題)。なお、除算は、0 で割ることができないので閉じていないが、これらの集合から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{Q}-\{0\}, \boldsymbol{R}-\{0\}, \boldsymbol{C}-\{0\}$ を考えると、これは除算に関しても閉じていることが解る。

【定義】 (剰余類)
整数 x と自然数 p が与えられた時に、x を p を割った余りを $\overline{x_p}(= x \mod p)$ (あるいは、 p が明らかな場合に、p を省略して、単に $\overline{x}$) で表すことにします。ただし、余り $\overline{x_p}$ は $x = pq + \overline{x_p}, q \in \boldsymbol{Z}, 0 \leq \overline{x_p} \leq p-1$ を満す整数とします。
そして、この余りだけを集めた集合 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} = \{\overline{x_p} | x \in Z\}$ を**剰余類**と呼びます[2]。

問題 53

1. $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 上の和 $(\overline{+})$、差 $(\overline{-})$、積 $(\overline{\times})$ をそれぞれ次のように定義するとき、$\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ は、これらの演算に関して閉じていることを示せ。

   和 $\overline{x} \mathbin{\overline{+}} \overline{y} = \overline{x+y}$

   差 $\overline{x} \mathbin{\overline{-}} \overline{y} = \overline{x-y}$

   積 $\overline{x} \mathbin{\overline{\times}} \overline{y} = \overline{x \times y}$

   ただし、$\boldsymbol{Z}$ が、和、差、積に関して閉じていることを用いてよい。

2. $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 上の二つの要素 $\overline{x}, \overline{y}$ 対して、もし、$\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ の要素 $\overline{z}$ が $\overline{x} = \overline{y} \mathbin{\overline{\times}} \overline{z}$ を満す時、$\overline{z}$ を $\overline{x}$ を $\overline{y}$ で割った商と呼び、$\overline{x}/\overline{y}$ で表す。また、この商を求める演算を $Z/p\boldsymbol{Z}$ 上の除算と呼ぶことにする。

   (a) $\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z} - \{\overline{0}\}$ は、除算に関して閉じていること示しなさい (ヒント:$\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z}$ は要素が 5 つしかないので、$\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z} - \{\overline{0}\}$ は要素が 4 つしかない。実際に 4×4 の除算表を書き、その結果が全て存在することを示せばよい)。

   (b) $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z} - \{\overline{0}\}$ は、除算に関して閉じいていないことを示しなさい (ヒント:$\overline{x}/\overline{y}$ が存在しないような、具体的な x, y の組を一つ示せばよい)。

問題 54　$\boldsymbol{R}$ を係数とする x に関する多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}[x] = \{f(x) | f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, n \in \boldsymbol{Z}^+, a_i \in \boldsymbol{R}\}$ とするとき、$\boldsymbol{R}[x]$ が、積に関して閉じていることを示せ。

問題 55　集合 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい[3]。

1. $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ が積に関して閉じていることを示せ。

2. $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ から、0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*[\sqrt{2}] = \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] - \{0\} = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \boldsymbol{Q}^*\}$ とするとき、$\boldsymbol{Q}^*[\sqrt{2}]$ が除算に関して閉じていることを示せ。

[2] この集合は、形式的には、無限集合の形に記述されているが、実際は、要素が丁度 p 個の有限集合である。
[3] このような集合 $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ を、「$\boldsymbol{Q}$ に $\sqrt{2}$ を付加した集合」と呼ぶ。

問題 56　集合 $S = \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} | a, b, c, d \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 57　二つの虚根を持つ、整係数の二次方程式 $x^2 + bx + c = 0 (b, c \in \boldsymbol{Z}, 4c - b^2 < 0)$ の一つの根を α とした時、集合 $S = \boldsymbol{Q}[\alpha] = \{x + y\alpha | x, y \in \boldsymbol{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 58　V^2 を平面ベクトル全体の集合とする。V^2 は、二つの平面ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V^2$ に対して、その二つの和を求めるベクトル和 $(+)$ に関して閉じていることを示せ。

問題 59　V^3 を空間ベクトル全体の集合とする。V^3 は、二つの空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V^3$ に対して、その二つの和を求めるベクトル和 $+$ に関して閉じていることを示せ。

(ヒント: 成分を利用し、V^3 は、$V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in V^3$ に対して、ベクトル和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \\ c+r \end{pmatrix}$ と表されることを利用すれば. . .)

問題 60　V^3 を空間ベクトル全体の集合とする。V^3 は、二つの空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V^3$ に対して、その二つのベクトル積を取る演算 $\times$ に関して閉じていることを示せ。

(ヒント: 成分を利用し、V^3 は、$V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in V^3$ に対して、ベクトル積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & q \\ c & r \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & r \\ a & p \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & p \\ b & q \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ と表されることを利用すれば. . .)

問題 61　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、}|ad-bc| \neq 0 \text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots [1]$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。
2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。
3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。
4. もし、行列 A が、逆行列を持つ（すなわち、$|ad-bc| \neq 0$ の時）場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。
5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

6. 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。