

代数学幾何学 A/B 演習 (2009/05/21)

問題 62 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、 $A = (x, y)$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、 $|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、 $\det(x - cy, y) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル x, y を使って、 $B = (x - \frac{a_{21}}{a_{22}}y, y)$ と表されている (ただし、 $a_{22} \neq 0$ とする) 時、 B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、 $|D| = |C|$ を満たし、 $D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、 $|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 63 3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、 $A = (x, y, z)$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、 $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、 $\det(x - cy, y, z) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル x, y, z を使って、 $B = (x, y - \frac{a_{32}}{a_{33}}z, z)$ と表されている (ただし、 $a_{33} \neq 0$ とする) 時、 B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、 $|D| = |C|$ を満たし、 $D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、 u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい)。また、この時、 $|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 64 次を証明せよ。

1. 平面ベクトル a, b が線型従属ならば、ある $u, v (\in \mathbf{R})$ (ただし、 u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、 $ua + vb = 0$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by = 0$ [ただし a, b の内どちらかは 0 でない] として表すことができる。 a, b が線型従属ならば、これらを位置ベクトルとする点 A, B の座標が同一直線上にあるので..)
2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v (\in \mathbf{R})$ (ただし、 u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、 $ua + vb = 0$ となるならば、平面ベクトル a, b が線型従属であることを示せ。

問題 65 次を証明せよ。

1. 空間ベクトル a, b, c が線型従属ならば、ある $u, v, w (\in \mathbf{R})$ (ただし、 u, v, w のいずれかの内、少くとも一つが 0 でない) があり、 $ua + vb + wc = 0$ となることを示せ。(ヒント：空間内の原点を通る平面の方程式は $ax + by + cz = 0$ [ただし a, b, c の内、いずれか一つは 0 でない] として表すことができるので..)
2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v, w (\in \mathbf{R})$ (ただし、 u, v, w のいずれかの内、少くとも一つが 0 でない) があり、 $ua + vb + wc = 0$ となるならば、平面ベクトル a, b が線型従属であることを示せ。

【定義】上記の二つの大問の結果を拡張することによって、より一般的に次の形で、 $n (> 0)$ 個のベクトル a_1, a_2, \dots, a_n に対する線型独立並びに線型従属が次のように定義される (平面ベクトルや、空間ベクトルの性質はこの定義の特殊な場合である)。

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_n \text{ が線型独立} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall c_1, c_2, \dots, c_n (\in \mathbf{R}) \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n c_i a_i \neq \mathbf{0} \\ &\quad (\text{ただし、} c_i \text{ の少くとも一つは 0 でない}) \\ a_1, a_2, \dots, a_n \text{ が線型従属} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_1, a_2, \dots, a_n \text{ が線型独立でない} \\ &\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_n (\in \mathbf{R}) \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n c_i a_i = \mathbf{0} \\ &\quad (\text{ただし、} c_i \text{ の少くとも一つは 0 でない}) \end{aligned}$$

問題 66 次を証明せよ。

1. a_1, a_2, \dots, a_n の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら a_1, a_2, \dots, a_n は線型従属である。
2. a_1, a_2, \dots, a_n の中に零ベクトル 0 が現れるならば、 a_1, a_2, \dots, a_n は線型従属である。

問題 67 平面のベクトルについて、次を証明せよ。

1. 任意の平面ベクトル v と、二つの単位ベクトル e_1, e_2 の計三つのベクトルは線型従属であることを示せ。
2. v と e_1 が独立ならば、 e_2 を、 v と、 e_1 の線型結合で表すことができることを示せ。
3. v と u が独立ならば、 v と u のどちらか一方は、 e_1 と独立であることを示せ。
4. v と u が独立ならば、 e_1 を、 v と、 u の線型結合で表すことができることを示せ。
5. v と u が独立ならば、任意の平面ベクトルが、 v と、 u の線型結合で表すことができることを示せ。

問題 68 空間のベクトルについて、次を証明せよ。

1. 任意の平面ベクトル v と、三つの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 の計四つのベクトルは線型従属であることを示せ。
2. v と e_1, e_2 が独立ならば、 e_3 を、 v と、 e_1, e_2 の線型結合で表すことができることを示せ。
3. v, u, w が独立ならば、 v, u, w のどれか一つは、 e_1, e_2 と独立であることを示せ。
4. v, u, w が独立ならば、 e_1 を、 v, u, w の線型結合で表すことができることを示せ。
5. v, u, w が独立ならば、任意の空間ベクトルが、 v, u, w の線型結合で表すことができることを示せ。

問題 69 次を証明せよ。

1. 一つのベクトルが線型従属ならば、そのベクトルは零ベクトルであることを示せ。
2. 三つの平面ベクトルは常に線型従属であることを示せ。
3. 四つの空間ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

問題 70 b, a_1, a_2, \dots, a_n が与えられたとする。 b が a_1, a_2, \dots, a_n の線型結合として異なる方法で

$$b = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$$

$$b = c'_1 a_1 + c'_2 a_2 + \dots + c'_n a_n$$

と書けたとする (すなわち、 $c_i \neq c'_i$ となるような i が少くとも一つはある。)。このとき a_1, a_2, \dots, a_n は線型従属であることを示せ。

問題 71 n 個のベクトル a_1, a_2, \dots, a_n に対して、その中からどの $n-1$ 個のベクトルを取ってきても線型独立だが、 n 個全部だと線型従属になってしまうような組み合わせが存在することを示せ。(ヒント：最初に互いに線型独立な $n-1$ 個の線型独立な a_1, a_2, \dots, a_{n-1} を考え、 a_n を、この $n-1$ 個のベクトルの線型結合で表すと...)

問題 72

1. 二つの平面ベクトル a, b が共に、 0 ベクトルでなく、また、互いに、直交するならば、この二つのベクトルは線型独立であることを示せ。
2. 三つの空間ベクトル a, b, c が、いずれも 0 ベクトルでなく、また、どの二つを取っても互いに直交するならば、実は、この三つのベクトルは線型独立であることを示せ。
3. 一般に、 $n(> 0)$ 個のベクトルに対して、どれも 0 ベクトルでなく、しかも、その中の任意の相異なる二つのベクトルが直交するのであれば、この n 個のベクトルは線型独立であることを示せ。

問題 73 n 個の a_1, a_2, \dots, a_n に対して、もし、その内の幾つかのベクトルが線型従属になっていたら、全体も線型従属になることを示せ。

問題 74 n 個のベクトル a_1, a_2, \dots, a_n が線型独立であれば、その内から $i(0 < i < n)$ 個のベクトルを任意に選んでも、それらが線型独立になることを示せ。(ヒント：前問の結果を利用し、背理法を使えば..)

【定義】(平面上の合同変換)

平面上のベクトルの変換 T が次の二つの関係¹を満す時、この変換 T は、合同変換 である。

$$|Tv| = |v| \quad (\text{ベクトルの長さを変えない})$$

$$\frac{(Tv, Tu)}{|Tv| \cdot |Tu|} = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|} \quad (\text{二つのベクトルの間の角度を変えない})$$

問題 75

1. 原点 O を中心に、反時計回りに角度 $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ 回転させる変換 R_θ は、合同変換であることを示せ。
2. x 軸を中心に、線対称移動する変換 M_x は、合同変換であることを示せ。
3. y 軸を中心に、線対称移動する変換 M_y を、上記の R_θ と M_x の合成を用いて表せ。
4. 二つの変換 T, S が共に合同変換ならば、その合成 ST も合同変換であることを示せ。
5. 平面上の任意の線型な合同変換は、 R_θ と M_x 単独、あるいはそれらの合成になることを示せ。

¹二つ目の条件は、一つ目の「長さを変えない」の条件があれば、分母があってもなくても意味が変わらないが、単独で「角度を変えない」とするには、分母が必要となる。