代数学幾何学 A/B 演習 (2009/06/04)

【定義】 (複素変換関数に対応した平面上の変換)
複素数上の変換 $\phi(z) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ に対して、平面のベクトルの変換 T_ϕ を、次のように定める。

$$T_\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\phi(x+yi)) \\ \mathrm{Im}(\phi(x+yi)) \end{pmatrix}$$

この変換 T_ϕ を ϕ に**対応する変換**と呼ぶ[1]。

問題 76

1. $c \in \boldsymbol{C}$ に対して、複素数上の変換 ϕ を $\phi(z) = cz$ と定義すると、これに対応した変換 T_ϕ が線型変換になる事を示せ。
2. $c = u + vi, (u, v \in \boldsymbol{R})$ とした時、上記の線型変換 T_ϕ に対応する行列を、u, v を用いて表せ。
3. $c(\neq 0) \in \boldsymbol{C}$ に対して、$\psi(z) = z + c$ と定義すると、これに対応した変換 T_ψ が線型変換にならない事を示せ。

問題 77　T, S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。
2. T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

問題 78　平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、それを実数 c 倍した $c\boldsymbol{v}$ を対応させる変換を T_c $(c \in \boldsymbol{R})$ で表すことにする (すなわち $T_c(\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v}$ となる)。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T_3(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ を求めなさい。
2. T_c は、線型変換であることを示しなさい。
3. T_c に対して、$T_c = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 79　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が独立であるとする。この時、二つの平面上の線型変換 T, S に対して、$T\boldsymbol{p} = S\boldsymbol{p}$, $T\boldsymbol{q} = S\boldsymbol{q}$ であれば、実は、$T = S$ であることを示せ。

[1]ただし、Re, Im は、それぞれ複素数の実部、虚部を取り出すものとする。

問題 80　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を考える。任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ を対応させる変換 T を考える (ただし、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ は、それぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積である)。この時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 81　平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix}$ を対応させるような二次元ベクトル上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。
3. $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどのようなベクトルに対応させるか？
4. $T^{-1} = T_B$ を満す行列 B を求めなさい。
5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか？

問題 82　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が互いに独立な時、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、ある実数 m, n が存在して、$\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q}$ と表せる。そこで、この m, n の組を改めて、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ というベクトルと同一視し、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に対応させる変換を T とする時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T の逆変換 T^{-1} に対応する行列 B を求めなさい。
3. T に対応する行列 A を求めなさい。

問題 83　行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を満たすとき、$A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 84　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 85　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ[2]。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 86　行列 A の複素共役行列[3] を、$\overline{A}$ で表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = (\overline{A})(\overline{B})$

問題 87　行列 A の転置行列を ${}^tA$、複素共役行列を $\overline{A}$ でそれぞれ表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(\,\overline{A}\,) = \overline{(\,{}^tA)}$
3. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
4. ${}^t(cA) = c({}^tA)$
5. ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$

---

[2]cf. Text p.37

[3]行列 $A = (a_{ij})$ の各成分 a_{ij} を共役複素数 $\overline{a_{ij}}$ に置き換えた行列 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ を、行列 A の**複素共役行列**と呼ぶ。(cf. Text p.37)

問題 88

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて、次の値をそれぞれ求めよ。

1. X^2, 2. X^3, 3. A^2, 4. A^3, 5. AX, 6. XA

問題 89 A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列[4]、E_n を n 次の単位行列[5] とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C + D) = AC + AD$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$
4. $AE_m = A, \quad E_mC = C$

問題 90 A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + B = B + A$
4. $c(A + B) = cA + cB$
5. $(c + d)A = cA + dA$
6. $(cd)A = c(dA)$
7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 91 A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 92 A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

[4]成分が全て 0 であるような行列。(cf. Text p.32)
[5]n 次の正方行列で、対角成分が 1、それ以外の要素が全て 0 となるような行列。(cf. Text p.35)