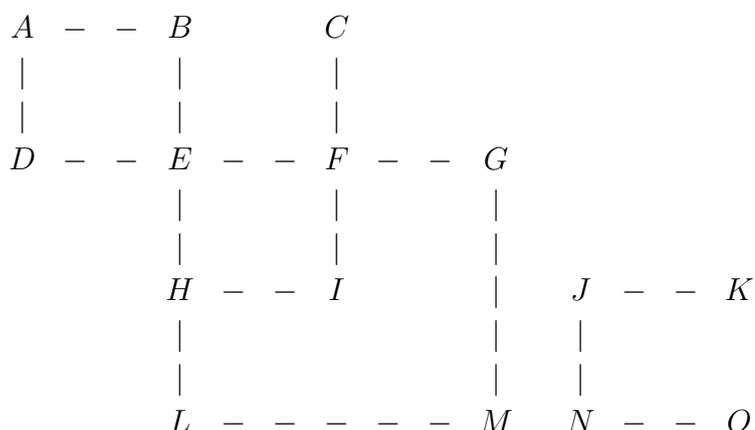


代数学幾何学 A/B 演習 (2009/06/25)

問題 101 n 次行列 A に対して $\text{tr}(A)$ で、 A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$)。この時、 P が正則行列であれば、 $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ であることを示せ。

問題 102 次の図の様に、 $A \sim O$ の間に道がある時に次の問に答えなさい。



1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha = A \sim O, \beta = A \sim O$) とし、

$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める時 (例えば、 A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、 A と C の間には道がないので、 x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y = (y_{\alpha\beta}) = X^2$ とした時に、 $y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか?

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどこどこか? また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか?

問題 103 次の行列の計算をなさい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 104

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした時に次の値を求めなさい。

1. A^2 , 2. A^4 , 3. A^{16} , 4. A^{40}

問題 105 (3,2)-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array} \right)$$

と定める。ただし、 E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array} \right)$ であることを示せ。
2. B^n を求めよ。
3. B は正則行列であることを示せ。

問題 106 A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の間に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
 2. A が逆行列を持つ条件と、 A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。
- 問題 107 A, B, X を n 次行列、 E を n 次の単位行列とするとき、次の間に答えなさい。

1. A が正則ならば、 $AX = B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。
2. $E - A$ が正則ならば、 $\sum_{i=0}^k A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$ であることを示しなさい。