代幾 A/B 演習 (2009/10/01)

問題 108　以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	2	0	3
夜	0	2	0	1	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1. $A = (a_{\alpha\beta})$ に対して、$a_{\alpha\beta} =$ (食品 α が含む栄養素 β の含有量) と定めた時、A を求めなさい。
2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。
3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 109　演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 110　演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 111

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 112　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 113　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 114　行列 A がエルミート行列[1] の時、$E+iA, E-iA$ が何れも正則行列であることを示せ。

【群の定義】集合 G の二つの元 a,b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab で表す。また、a,b から ab を求める操作を (**二項**) **演算** と呼ぶ。) が定まり、集合 G がこの演算に対して、閉じて[2] おり、かつ、次の三つの命題 (この三つの命題を**群の公理** と呼ぶ。) を満すとき、G は (その積を求める演算に関して) **群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. (結合法則) $\forall a,b,c \in G\,[(ab)c = a(bc)]$
2. (単位元の存在) **単位元** と称する特別な元 e が、唯一、G に含まれ、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する。
3. (逆元の存在) G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が唯一、G に含まれる。この x を a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

与えられた**集合と演算の組**が、**群になっているかどうか**は、その集合がその演算に関して閉じており、さらに、それらが、上記の**群の公理** (**三つの命題**) **が成立するかどうかを確認する**事で判定できる。群になるためには、三つの命題の全てが成立する必要があるが、逆に一つでも成立しない命題があれば群でない[3]。

[**例題 1**] 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は、加法 (+) に関して、群である。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Z}$ 上で、加法 (+) は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{Z}$に対して $(a+b)+c = a+(b+c)$ なので、**結合法則**を満す。
2. $0 \in \boldsymbol{Z}$ であり、$\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a+0 = 0+a = a$ なので、0 は $\boldsymbol{Z}$ の加法に対する **単位元** である[4]。
3. $\boldsymbol{Z}$ の任意の要素 a に対して、$x = -a$ とすれば、$x = -a \in \boldsymbol{Z}$ であり、$a+x = a+(-a) = 0, x+a = (-a)+a = 0$ となるので、$x = -a$ は、a の**逆元**となる[5]。すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の任意の要素に対して、**逆元が存在**する。

---

[1]行列 A がエルミート行列であることの定義は、行列 A が $A = A^*$ を満すことを言う。ただし、$A^* = \overline{{}^tA}$ である。

[2]すなわち、命題 $\forall a,b \in G[ab \in G]$ が成立すること。

[3]ここでは、「群かどうかの判定」だけを問題とする。「群の性質」や、「群の応用」については、二年生以後で学ぶことになる。

[4]本来ならば、さらに 0 が $\boldsymbol{Z}$ の唯一の単位元であることも示す必要があるが、実は、$\forall a \in \boldsymbol{Z}[a+0 = 0+a = a]$ が判った時点で、これが、唯一であることも、この性質から証明できる (やってみよう..)。

[5]こちらも、本来ならば、さらに $(-a)$ が、a に対する、$\boldsymbol{Z}$ 内の唯一の逆元であることを示す必要があるが、これも、$a+(-a) = (-a)+a = 0$ が判った時点で、結合法則と、単位元の性質を利用して、証明できる (やってみよう..)。

[**例題 2**] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の中には、$1+x=1$ となる様な x が存在しない[6](もし、$1+x=1$ とすると、$x=0$ とならなければならないが、0 は $\boldsymbol{N}$ に含まれない[7])。したがって、単位元が ($\boldsymbol{N}$ の中に..) 存在しない。すなわち、群の公理の二つ目の性質 (単位元の存在) を満さないので、$\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない。

[**例題 3**] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の乗法に関する単位元は 1 である (これは $\boldsymbol{N}$ に含まれるので単位元は存在する) が、$2\times x=1$ となる x は $\boldsymbol{N}$ に含まれないので、2 に対する逆元が $\boldsymbol{N}$ に含まれない。すなわち、群の三つ目の公理 (逆元の存在) が成立しないので、$\boldsymbol{N}$ は、乗法に関して群にならない。

[例題 4] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から 0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(=\boldsymbol{Q}-\{0\})$ とすると、$\boldsymbol{Q}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群になる。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Q}^*$ 上で、乗法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Q}^*$ は乗法に関して群を成す。

1. $\forall a,b,c\in\boldsymbol{Q}^*$に対して $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ なので、**結合法則**を満す。
2. $1\in\boldsymbol{Q}^*$ であり、 $\forall a\in\boldsymbol{Q}^*$に対して $a\times 1=1\times a=a$ なので、1 は $\boldsymbol{Q}^*$ の乗法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素 a に対して、$x=1/a$ とすれば、$x=1/a\in\boldsymbol{Q}^*$ であり ($0\notin\boldsymbol{Q}^*$ であることに注意。)、$a\times x=a\times(1/a)=1, x\times a=(1/a)\times a=1$ となるので、$x=1/a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素に対して、**逆元が存在**する。

これらを参考に、次の問題を解きなさい。

問題 115　　次の問に答えなさい。

1. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、加法に関して群となることを示せ。
2. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、乗法に関して群とならないことを示せ。
3. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(=\boldsymbol{C}-\{0\})$ は、乗法に関して群になることを示せ。

[6]「**成立しない**事」を示す一番簡単な方法は、「**反例**を示す事」である。反例は、「**成立しない例**であれば何でも構わない」 ので、ここでは、「1 に関する単位元の不在」を取り上げている。しかし、勿論これに限るわけではなく、例えば「2 に関する単位元の不在」でも構わない。

[7]ここでは、「自然数」を高校までと同様「正の整数 ($\boldsymbol{N}=\{1,2,3,...\}$)」と考えることにする。ただし、大学の数学では、自然数に 0 を含めるのが普通である (仮に、大学流に、0 を自然数に含め、単位元の存在が確認できた所で、今度は、逆元 [例えば 1 の逆元] が自然数の中に、存在しないので、いずれにせよ群にはならないが..)。

問題 116　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から -2 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(=\boldsymbol{C}-\{-2\})$ 上の演算 $(\cdot)$ を $x\cdot y=(x+2)(y+2)-2$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{C}^*$ は $(\cdot)$ に関して群を成すことを示すために、以下の問いに答えよ。

1. 演算 $\cdot$ が結合法則を満す。すなわち $\forall x,y,z\in\boldsymbol{C}^*[(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)]$ であることを示せ[8]。
2. 演算 $\cdot$ の単位元、即ち $\forall x\in\boldsymbol{C}^*[x\cdot e=e\cdot x=x]$ となる e を求めよ。
3. $a(\in C^*)$ の逆元、即ち $a\cdot x=x\cdot a=e$ となる x を a を用いて表せ。

問題 117

非負の整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}^+=\{x\in\boldsymbol{Z}|x\geq 0\}$ に対して、次のように定義された、二つの数の差の絶対値を取る演算 $(\cdot)$ を考える。この時 $\boldsymbol{Z}^+$ は、この演算 $(\cdot)$ に関して、群になっていないことを示しなさい。

$$x\cdot y=|x-y|$$

問題 118　K (K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)=\{A|A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。) 。

問題 119　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。) 。

問題 120　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K)=\{A|A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 121　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 122　n 次のエルミート行列全体の集合 E_n は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 123　n 次のユニタリ行列全体の集合 U_n は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 124　n 次のエルミート行列全体の集合 E_n は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 125　n 次のユニタリ行列全体の集合 U_n は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

[8]もちろん、ここでは、普通に $\boldsymbol{C}$ の四則に関する性質を利用してよい。以下の問題も同様である。