代幾 A/B 演習 (2009/10/15)

問題 126　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[1]になることを示せ。

問題 127　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.6 の類題 1 の 1. の (1)
2. p.6 の類題 1 の 1. の (2)
3. p.6 の類題 1 の 2.
4. p.6 の類題 1 の 3. の (1)
5. p.6 の類題 1 の 3. の (2)
6. p.6 の類題 1 の 3. の (3)

問題 128　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.7 の類題 2 の 1. の X
2. p.7 の類題 2 の 1. の Y
3. p.7 の類題 2 の 2. の X
4. p.7 の類題 2 の 2. の Y
5. p.8 の類題 3 の A
6. p.8 の類題 3 の B
7. p.8 の類題 3 の C

問題 129　偶置換全体の集合[2]は、置換の合成に関して、群になる[3] ことを示せ。

問題 130　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.13 を解きなさい。

問題 131　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.14 を解きなさい。

---

[1]この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。

[2]偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。

[3]この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。

[巡回置換]

6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

は、1 を 4 に、4 を 5 に、そして 5 を 1 に変換している (そして他の要素、2, 3, 6 は自分自身に変換し、うごかさない)。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、**巡回置換**と呼び、その入れ替える要素を並べて表す (上の例では、$(1,4,5)$ と表す)。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ (上の例では 3) と呼ぶ。互換は、循環置換の特別な場合 (すなわち $k=2$ の場合) と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 132 長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の巡回置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか？

問題 133 長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(=\sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 134 長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 135 任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 136 演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 137 演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 138 n の置換の個数が、$n!$ [4] であることを示せ。

問題 139

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ = E$ となったとする (ただし、E は単位行列である。)。A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。

2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。

[4] $n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。