

代幾 A/B 演習 (2009/10/22)

問題 140 行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

問題 141 演習書の p.13 の 1 章の類題 7 を解きなさい。

問題 142 演習書の p.13 の 1 章の類題 8 を解きなさい。

問題 143 $\det {}^t A = \det A$ と、 $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて、 $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 144 演習書の p.18 の 1 章の問題 1.3 を解きなさい。

問題 145 演習書の p.18 の 1 章の問題 1.4 を解きなさい。

問題 146 次の基本行列の行列式を求めなさい。

1. $P_n(i, j)$, 2. $Q_n(i; c)$, 3. $R_n(i, j, c)$.

問題 147 演習書の p.18 の 1 章の問題 1.5 を解きなさい。

問題 148 演習書の p.18 の 1 章の問題 1.6 を解きなさい。

問題 149 正則行列は基本行列の積で表すことができることと、 $|AB| = |A||B|$ を用いて、正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 150 演習書の p.19 の 1 章の問題 1.11 を解きなさい。

問題 151 演習書の p.19 の 1 章の問題 1.12 を解きなさい。

問題 152 直交行列¹ A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。(ヒント : $|E| = 1$, $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 153 演習書の p.30 の 2 章の類題 6 を解きなさい。

問題 154 冪零行列²は正則でないことを示せ。(ヒント : A が正則ならば $|A| \neq 0$ であることと、 $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 155 演習書の p.31 の 2 章の類題 7 を解きなさい。

問題 156 演習書の p.31 の 2 章の類題 8 を解きなさい。

¹ A が直交行列であることの定義は、 ${}^t A A = E$ となることである。

² A が冪零行列であることの定義は、ある自然数 n が存在し、 $A^n = O$ (ただし、 O は零行列) となることである。

問題 157 実行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ に対し、次の行列式を求めよ。

1. $\det X$, 2. $\det(E - X)$.

問題 158 次の行列式を因数分解せよ。

$$1. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$$

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A = {}^t A$ を満す時、 A を対称行列と呼び、 $A = -{}^t A$ を満す時、 A を交代行列と呼ぶ。

問題 159 行列 A が交代行列ならば、 A の対角要素は 0 であることを示せ。

問題 160 行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、 A は、零行列 O であることを示せ。

問題 161

1. 対称行列 A, B の和 $A + B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C, D の和 $C + D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 162

1. n 次行列 B の (i, j) 成分を b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) とする。この時、次の行列の (i, j) 成分を求めよ。

$$1. {}^t B, \quad 2. B + {}^t B, \quad 3. B - {}^t B.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B + {}^t B$ は対称行列であることを示せ。また $B - {}^t B$ は交代行列であることを示せ。

問題 163 正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。