

## 代幾 A/B 演習 (2009/11/05)

問題 164  $n$  の置換  $\sigma$  は次の様な互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、 $p_i > q_i, p_i > p_{i+1}, k < n$  となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)\cdots(p_k, q_k)$$

問題 165 演習書の p.74 の 5 章の類題 3 を解きなさい。

問題 166 演習書の p.75 の 5 章の類題 4 を解きなさい。

問題 167  $A$  を正則な行列、 $k, l$  を整数とする時、次の等式を示しなさい。

1.  $A^l A^k = A^{l+k}$

2.  $(A^l)^k = A^{lk}$

問題 168 演習書の p.76 の 5 章の類題 5 を解きなさい。

問題 169 演習書の p.78 の 5 章の類題 6 を解きなさい。

問題 170  $n$  次行列  $A, B$  に対応して、次の等式を示せ。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

問題 171 演習書の p.80 の 5 章の類題 7 を解きなさい。

問題 172 演習書の p.81 の 5 章の類題 8 を解きなさい。

問題 173 実  $n$  次行列  $A, B$  に対応して、次の等式を示せ。

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB| \cdot |A-iB|$$

問題 174 演習書の p.81 の 5 章の類題 9 を解きなさい。

問題 175 次の行列式を求めなさい。ただし、もし、その結果が因数分解可能なら因数分解しなさい。

$$1. \begin{vmatrix} t & a & b & c \\ a & t & c & b \\ b & c & t & a \\ c & b & a & t \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} a & -b & a & b \\ b & a & -b & a \\ a & b & a & -b \\ -b & a & b & a \end{vmatrix}$$

問題 176 次の等式を証明せよ。

$$1. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} na_1 + b_1 & na_2 + b_2 & na_3 + b_3 \\ nb_1 + c_1 & nb_2 + c_2 & nb_3 + c_3 \\ nc_1 + a_1 & nc_2 + a_2 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2 - n + 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

問題 177 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. 四つの変数  $x, a, b, c$  に関するヴァン=デルモント行列式<sup>1</sup>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta(x, a, b, c)$$

が、三つの変数  $a, b, c$  に関する差積  $\Delta(a, b, c)$  と、 $x$  に関する三次の多項式  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  を用いて、 $\Delta(x, a, b, c) = \Delta(a, b, c)f(x)$  と表現できることを示せ。また、この時、係数  $\alpha, \beta, \gamma$  を変数  $a, b, c$  を用いて表せ。

2. 同じく、前問の行列式の 1 列目に関する行列式の展開<sup>2</sup>を求めよ

3. 前の二つの問題の結果を用いて、冒頭の行列式の値を、三つの変数  $a, b, c$  の式と差積  $\Delta(a, b, c)$  の積の形で表したものを求めよ。

4. 同様にして行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

の値を求めよ。

<sup>1</sup>Text p.82 参照。

<sup>2</sup>Text p.85 参照

問題 178 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

問題 179 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

問題 180 次の行列式を因数分解しなさい。

$$1. \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

問題 181 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.3 を解きなさい。

問題 182 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.4 を解きなさい。

問題 183 次の行列  $A$  について以下の問い答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1.  $B$  を次のような行列とする時、 $A = B({}^t B)$  であることを示せ。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

2. 行列式  $|A|$  の値を、三つの変数  $a, b, c$  の差積  $\Delta(a, b, c)$  を用いて表せ。

問題 184 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.5 を解きなさい。

問題 185 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.6 を解きなさい。

問題 186 次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

問題 187 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.7 を解きなさい。

問題 188 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.8 を解きなさい。

問題 189 次の問に答えなさい。

1.  $A, B$  が  $n$  次行列の時、次の式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n |A||B|$$

2. 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ a+b-c-d & a+b+c+d & a-b-c+d & a-b+c-d \\ a-b+c-d & a-b-c+d & a+b+c+d & a+b-c-d \\ a-b-c+d & a-b+c-d & a+b-c-d & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

問題 190 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.9 を解きなさい。

問題 191 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.10 を解きなさい。

問題 192 二つの多項式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = px^2 + qx + r$  に対して、次の行列式  $R(f, g)$  をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式  $f(x) = 0$  と  $g(x) = 0$  が同じ根を持つこと」と、「 $R(f, g) = 0$  が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。

問題 193 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.11 を解きなさい。

問題 194 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.12 を解きなさい。

問題 195 次の行列式を因数分解しなさい。

$$1. \begin{vmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ a^2c & a^2d & b^2c & b^2d \\ ac^2 & bc^2 & ad^2 & bd^2 \\ c^3 & c^2d & cd^2 & d^3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1a_2 & a_1a_2a_3 \\ b_1 & 1 & a_2 & a_2a_3 \\ b_1b_2 & b_2 & 1 & a_3 \\ b_1b_2b_3 & b_2b_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

問題 196 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.15 を解きなさい。

問題 197 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.16 を解きなさい。