代幾 A/B 演習 (2009/11/26)

問題 198　線型空間の公理

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)
3. $\exists\vec{0}\forall\vec{a}[\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)
4. $\forall\vec{a}\exists(\vec{-a})[\vec{a}+(\vec{-a})=(\vec{-a})+\vec{a}=\vec{0}]$ (逆元の存在)
5. $c(\vec{x}+\vec{y})=c\vec{x}+c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)
6. $(c+d)\vec{x}=c\vec{x}+d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)
7. $(cd)\vec{x}=c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniqueness)。

問題 199　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。
3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。
4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。
5. 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。
6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 200 $M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。

2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。

3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。

4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)

5. ある行列 A に対して、$AB = E,\ CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n (n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 201 演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.

2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)

3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 202 演習書の p.11 の 1 章の類題 5 を解きなさい。

問題 203　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \middle| \ a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (7 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 204　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.7 を解きなさい。

問題 205　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.8 を解きなさい。

問題 206
複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 ($\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a + c) + (b + d)i$) と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (7 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 207　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.9 を解きなさい。

問題 208　演習書の p.19 の 1 章の問題 1.10 を解きなさい。

問題 209　実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c$, $\boldsymbol{g} = g(x) = ux^2 + vx + w$ と、実数 h に対して、普通に、和 ($\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a + u)x^2 + (c + v)x + (c + w)$) と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (7 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 210　三角関数の和の集合 $F[x] = \{a \cos x + b \sin x \mid a, b \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$F[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = a \cos x + b \sin x$, $\boldsymbol{g} = g(x) = c \cos x + d \sin x$ と、実数 e に対して、普通に、和 ($\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a + c) \cos x + (b + d) \sin x$) と、定数倍 ($e\boldsymbol{f} = (ea) \cos x + (eb) \sin x$) を考えるとき、$F[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (7 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 211　問題 210 で定義された集合 $F[x]$ に対して、次の問いに答えなさい。

1. $F[x]$ の要素 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ に対して、これを x で微分した関数 $f'(x)$ が、再び、$F[x]$ に入ることを示せ。

2. $F[x]$ の要素 $f(x)$ に対して、$f'(x)$ を対応させる変換 D が線型変換であることを示せ。

問題 212　平面ベクトル全体の集合 V^2 上の線型変換全体の集合を $F[V^2]$ とする。$F[V^2]$ の要素 T, S 並びに実数 c に対して、和 $(T+S)$ と定数倍 (cT) を、それぞれ $(T+S)(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) + S(\boldsymbol{v})$, $(cT)(\boldsymbol{v}) = c(T(\boldsymbol{v}))$ と定義すると、$F[V^2]$ は線型空間になっていることを示せ。
(ヒント:線型空間の公理 (7 つある) が、全て成立することを示せばよい)

【内積の定義】$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 V の二つの要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対応して、複素数 $\boldsymbol{C}$ の要素 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を対応させる演算子 $(\_, \_)$ が、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, c \in \boldsymbol{C}$ に対して、次の性質を満す時に、この演算子 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を**内積** と呼ぶ[1]。

1. $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
2. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$
4. $\boldsymbol{x} \neq 0 \rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$
5. $\exists \boldsymbol{x}_0 \in V s.t. (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) > 0$

問題 213　$(\_, \_)$ が、上記の定義に従った内積なら、次の性質を満すこと示せ。

1. $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \bar{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$
3. $(\boldsymbol{x}, 0) = 0$
4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$

問題 214　$(\_, \_)$ が、上記の定義に従った内積なら、更に次の性質を満すこと示せ。ただし、証明には、上記の内積の定義の他に、前問の結果を用いても良い。

1. $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_0$ と平行でない場合、関数 $\phi(t) = (t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ が、実数上の連続関数である事を示しなさい。
2. 上記の $\phi(t)$ は、区間 $[0,1]$ で 0 にならないこと示せ(ヒント:ベクトル $\boldsymbol{x}_t t = \boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_0$ は、$t=0$ の時 $\boldsymbol{x}_0$ に等しく、 $t=1$ の時 $\boldsymbol{x}$ に等しい。t が区間 $[0,1]$ に入る間、$\boldsymbol{x}_t$ は、$\boldsymbol{0}$ になることはないので..)。
3. $\boldsymbol{x} \neq 0 \rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ (ヒント:まず、x が x_0 に平行な場合とそうでない場合に分けて考える。更に平行でない場合は、前問の関数が、$t=0$ の時、正値 (x_0, x_0) であり $t=1$ の時に (x, x) となるが、この間に 0 になることはないことを利用して...)。

[1] この条件は、教科書 p.61 の定理 [6.1] より限定されている。しかし、以下の問題にあるように、この条件から定理 [6.1] の性質は全て導くことができる。