# 代幾 A/B 演習 (2009/12/03)

**問題 215**　$f(x) = a\cos x + b\sin x$ という形をした関数全体の集合を $F(= \{a\cos x + b\sin x | a, b \in R\})$, 二次元の実ベクトルの集合を $V(= \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、$f$ を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も、 $F$ の要素であることを示せ。
2. 上記の $F$ 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. 上記の $F$ 上の変換 $D(f) = f'$ は、線型変換であることを示せ。
4. $f(x) = a\cos x + b\sin x \in F$ に対して、二次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
5. $V$ 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
6. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある $2 \times 2$ の実行列 $A_D$ があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
7. 変換 $D$ の逆変換を $S$ とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 $A_S$ があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。
8. $A_S$ は、$A_D$ 逆行列であることを示せ。
9. 上記の性質を利用して、$F$ 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x$ の解の内、$F$ に含まれるものを求めよ。
10. 同様にして $F$ 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x$ の解の内、$F$ に含まれるものを求めよ。

**問題 216**　$A$ を $(m, n)$ 型の複素行列とする。この時、$C^n$ から $C^m$ への写像 $T_A : C^n \longrightarrow C^m$ を、$T_A(x) = Ax\ (\forall x \in C^n)$ で定義するとき、この写像 $T_A$ は、$C^n$ から $C^m$ への**線型写像** になっていることを示せ。

**問題 217**　自然数 $n, m$ は、$n > m$ を満すとし、$A$ を $(n, m)$ 行列、$B$ を $(m, n)$ 行列とする。この時、二つの行列の積 $AB$ ( これは、$n$ 次の正方行列になることに注意 ) の行列式 $|AB|$ は常に 0 になることを示せ。( ヒント : $A$ に、全ての要素が 0 の行を下に $(n - m)$ 行追加した行列 $A'$ と、$B$ に、全ての要素が 0 の列を右に $(n - m)$ 列追加した行列 $B'$ の、共に $n$ 次の行列を作り、その積 $A'B'$ を計算すると.. )

**問題 218** $f(x) = a\cos x + b\sin x + ce^{-x}$ という形をした関数全体の集合を $F(= \{a\cos x + b\sin x + ce^{-x} | a, b, c \in R\})$, 三次元の実ベクトルの集合を $V(= \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a, b, c \in R\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、$f$ を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ も、 $F$ の要素であることを示せ。
2. 上記の $F$ 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. 上記の $F$ 上の変換 $D(f) = f'$ は、線型変換であることを示せ。
4. $f(x) = a\cos x + b\sin x + ce^{-1} \in F$ に対して、三次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
5. $V$ 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
6. 上記の変換 $\bar{D}$ には、ある $3 \times 3$ の実行列 $A_D$ があり、$\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
7. 変換 $D$ の逆変換を $S$ とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v))$ も、ある行列 $A_S$ があり、$S(v) = A_S v$ となることを示せ。
8. $A_S$ は、$A_D$ 逆行列であることを示せ。
9. 上記の性質を利用して、$F$ 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x + e^{-x}$ の解の内、$F$ に含まれるものを求めよ。
10. 同様にして $F$ 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x + e^{-x}$ の解の内、 $F$ に含まれるものを求めよ。

**問題 219** $(m, n)$ 型の行列 $A, B$ に対して、$PAQ = B$ を満す、正則な行列 $P, Q$ ( ただし、$P, Q$ は、それぞれ $n$ 次と $m$ 次の正方行列とする ) が存在する時に、$A \sim B$ で表すことにする。この時、$\sim$ は同値関係であること、すなわち、次の三つが成立することを示せ。

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

**問題 220** $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) \Leftrightarrow A \sim B$ を示せ。

## [行列の冪と冪零[1]]

$n$ 次正方行列 $A$ に対して、$A$ を $k$ 回掛けた結果を $A$ の $k$ 回の**冪** *(***巾***)* と呼び $A^k$ で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ ($E$ は単位行列) と定める[2]。

$n$ 次正方行列 $A$ に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して、$A^k = O$($O$ は零行列) である時、この行列 $A$ は、**冪（巾***)* **零行列**と呼ぶ[3]ことにする。また、冪零行列 $A$ に対して、$k$ より小さい自然数では $O$ にならず、$k$ で初めて $O$ になる時、この $k$ を冪零行列 $A$ の**次数**と呼ぶことにする。なお、$O$ (零行列) の次数は 1 であり、逆に、次数が 1 の冪零行列は $O$ のみである。

**問題 221**

行列 $A, B$ が共に冪零行列で、その次数を、それぞれ $k, j$ であるとする。さらに、この二つの行列が $AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 $AB$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値[4] $m$ を $k, j$ で表しなさい。また、実際に、$AB$ の次数が $m$ になる例と、ならない[5]例をそれぞれ示しなさい。

2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値 $m$ を $k, j$ で表しなさい。また、実際に、$A + B$ の次数が $m$ になる例と、ならない例をそれぞれ示しなさい。

**問題 222**　$A$ が冪零行列の時、$e^A$ を次のように定義する[6]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、$O, E$ はそれぞれ、零行列、単位行列とする。

2. 冪零行列 $A, B$ が、$AB = BA$ を満すならば、$e^A$ と $e^B$ の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。

3. $e^A$ は正則であることを示しなさい。

4. 正則な行列 $Q$ に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

---

[1] 「冪」、「冪零」は、それぞれ「べき」、「べきれい」と呼ぶ。

[2] $O^0 = E$ であることに注意。

[3] 教科書 p.71 章末問題 6. を参照のこと。

[4] 必ず、$(AB)^m = O$ となる様な $m$ の内、最小の数を求める。次の問も同様。

[5] $m$ は、次数の最大値なので、$m$ より小さい数で $O$ になってしまう場合があり得る。

[6] 形式的には無限和だが、$A$ が冪零なので、実質は有限和であることに注意。

**問題 223**　行列 $A$ が冪零行列ならば、$|A| = 0$ を示せ。

**問題 224**　次のような $n$ 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**問題 225**　$n$ 次行列 $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \leq i, j \leq n)$ ( ただし、$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている ) について、次の問に答えなさい。

1. $n$ 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $AJ_n$ を求めなさい。
2. $n$ 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $J_nA$ を求めなさい。
3. $J_n$ は、正則行列であることを示し、その逆行列 $J_n^{-1}$ を求めなさい。

**問題 226**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

**問題 227**　演習書の p.25 の 2 章の類題 1 を解きなさい。

**問題 228**　演習書の p.27 の 2 章の類題 3 を解きなさい。