

代幾 A/B 演習 (2009/12/10)

問題 229 次の行列の Rank (階数) を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 230 演習書の p.33 の 2 章の類題 9 を解きなさい。

問題 231 演習書の p.34 の 2 章の問題 2.2 を解きなさい。

問題 232 次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 233

共に零ベクトルではない、二つの三次元ベクトル a, b を取り、その二つのベクトルの外積 $a \times b$ を c とする時、次の問いに答えなさい。

1. $\det(a, b, c) = |c|^2$ を示せ。
2. もし、 a と b が直交するならば、 a, b, c をそれぞれ自分自身の長さで割ったベクトルを要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ |a| & |b| & |c| \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ。

問題 234 演習書の p.34 の 2 章の問題 2.3 を解きなさい。

問題 235 演習書の p.35 の 2 章の問題 2.4 を解きなさい。

問題 236

1. 行列 X が実対称行列、 Y が実交代行列の時、 $A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。
2. 逆に、複素行列 A が、エルミート行列であれば、ある実対称行列 X と実交代行列 Y が存在し、 $A = X + iY$ と一意に表すことができることを示せ。

問題 237 演習書の p.35 の 2 章の問題 2.5 を解きなさい。

問題 238 演習書の p.35 の 2 章の問題 2.6 を解きなさい。

問題 239

1. 行列 A がエルミート行列の時、 $U = (E - iA)(E + iA)^{-1}$ で定義される行列 U は、ユニタリー行列¹で、かつ $|E + U| \neq 0$ であることを示せ。
2. 行列 U が $|E + U| \neq 0$ を満す、ユニタリー行列の時、 $A = i(U + E)^{-1}(U - E)$ で定義される行列 A がエルミート行列であることを示せ。

問題 240 演習書の p.35 の 2 章の問題 2.7 を解きなさい。

問題 241 演習書の p.61 の 4 章の類題 2 を解きなさい。

問題 242 行列 A, B が共にエルミート行列ならば、次の行列もまた、エルミート行列になるということを示せ。

1. $A + B$, 2. $AB + BA$, 3. $i(AB - BA)$

問題 243 演習書の p.62 の 4 章の類題 3 を解きなさい。

問題 244 演習書の p.63 の 4 章の類題 4 を解きなさい。

問題 245 A_1, A_2, \dots, A_n がエルミート行列の時、 $\sum_{i=1}^n A_i^2 = O$ ならば、実は、 $A_i = O (i = 1, 2, \dots, n)$ であることを示せ。

問題 246 演習書の p.63 の 4 章の類題 5 を解きなさい。

問題 247 演習書の p.66 の 4 章の問題 4.2 を解きなさい。

問題 248 A がエルミート行列ならば、 $|A|$ は実数であることを示せ。

問題 249 演習書の p.66 の 4 章の問題 4.3 を解きなさい。

問題 250 演習書の p.66 の 4 章の問題 4.4 を解きなさい。

問題 251 A がエルミート行列、 B が正則行列ならば、 B^*AB もエルミート行列になることを示せ。

問題 252 演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

¹行列 A がユニタリー行列であることの定義は、行列 A が $A^* = A^{-1}$ を満すことを言う。