

代幾 A/B 演習 (2009/12/17)

問題 253 n 次の正方行列 A が確率行列¹ で、 n 次の縦ベクトル \vec{p} が確率ベクトル² の時、 $A\vec{p}$ もまた、確率ベクトルになること示せ。

問題 254 演習書の p.66 の 4 章の問題 4.1 を解きなさい。

問題 255 演習書の p.66 の 4 章の問題 4.5 を解きなさい。

問題 256

8 つの部屋 (1 から 8 の数字が振られている) があり、その何れかの部屋に人がいるとする (下の例では、現在 5 番目の部屋に人がいる)。

1	2	3	4	5	6	7	8

一日に一度、コイン³を投げ、表が出れば左の部屋へ、裏が出れば右の部屋に移るとする。ただし、移動先がない場合⁴は、その部屋に留まるとする。

この時、次の問いに答えなさい。

1. 本日、 i 番目の部屋にいる確率を $\vec{p} = (p_i)$ 、次の日に i 番目の部屋にいる確率を $\vec{q} = (q_i)$ とした時 $\vec{q} = A\vec{p}$ となるような行列 A を求めなさい。
2. 初日は、1 番目の部屋にいた (即ち $\vec{p}_1 = (p_{1i})$ の時、 $p_{11} = 1, p_{1i} = 0 (i = 2, \dots, 8)$ となる) とすると、4 日目 (即ち、3 度コインを投げる) に、再び、部屋 1 にいる確率を求めなさい。
3. A^n を求めなさい。
4. \vec{p}_0 を確率ベクトルとし、確率ベクトルの列 $\{\vec{p}_n\}$ を、 $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n$ で定義すると、最初の確率ベクトル \vec{p}_0 に拘らず、このベクトル列が収束する⁵ ことを示しなさい。

問題 257 演習書の p.67 の 4 章の問題 4.6 を解きなさい。

問題 258 演習書の p.67 の 4 章の問題 4.7 を解きなさい。

¹行列 $A = (a_{ij})$ が確率行列であることの定義は、その成分が非負で、しかも、その全ての行において、成分の和が 1 になること、即ち $a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 (i = 1..n)$ であることを言う。(cf. 教科書 p.73)

² $\vec{p} = (p_i)$ が確率ベクトルであることの定義は、その成分が、全て非負で、かつ、その和が 1 となることである。即ち、 $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ の場合を言う。

³このコインは、歪んでおらず、投げると正確に $\frac{1}{2}$ の確率で表があるいは裏のどちらかが出るとする。

⁴1 番目の部屋で表が出た場合と、8 番目の部屋で裏が出た場合

⁵ベクトル列 $\{\vec{p}_n\}$ がベクトル \vec{q} に収束する、すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}_n = \vec{q}$ であることの定義は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{p}_n - \vec{q}| = 0$ である。

問題 259

A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人は、それぞれ自分のホームページを作成し、互いに見せあって、自慢することにした。そして、もし、自分以外の人ホームページを見て、これは面白いと思ったならば、自分のページにその面白いと思ったページへのリンクを作成することにした。

暫くして、各自のホームページも作成され、内容の評価が済み、その結果として、次のようなリンクが行われた (A 君は E 君以外の三人のページにリンクをはったが A 君のページにリンクをしたのは E 君だけだった)。

リンク元 \ リンク先	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

その後、5 人は、誰のページが一番良いかを議論することになった。その結果、次のような結論⁶ になった。

- もし、そのページに価値があるならば、他の人からリンクされているに違いない (リンクされているページは評価が高い)。したがって、そのページの価値は、他のからのリンクの価値の総和で表現される。
- そのリンクの価値は、リンク元の価値に比例するに違いない (価値のあるページからリンクされるページは評価が高い)。
- そのリンクの価値は、リンク元のリンク

量に反比例するに違いない (できるだけ価値のあるページだけをリンクする)。

この結論を、5 人のホームページの評価を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ として、関係式で表現すると、次のようになった。

$$\begin{cases} x_1 = & & & & \frac{1}{1}x_5 \\ x_2 = & \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & \\ x_3 = & \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = & \frac{1}{3}x_1 & & & \\ x_5 = & & \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

この時、次の問いに答えなさい。

1. 縦ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ を考え、上記の関係式を行列とベクトルを用いて表すと、 $\vec{x} = A\vec{x}$ となる。このような行列 A を求めなさい。
2. A^n を求めなさい。
3. $x_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ とし、 $x_{n+1} = Ax_n$ とすると、 $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が収束することを示しなさい。
4. x_∞ は、 $x_\infty = Ax_\infty$ を満すことを示しなさい。
5. この評価法で、A 君から E 君の内、一番評価が高いのは誰のページか。

⁶Google の秘密 - PageRank 徹底解説 (http://homepage2.nifty.com/baba_hajime/wais/pagerank.html)