

代数学幾何学 (A/B) 小テスト [問題] (2009/07/16)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように!!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 解答用紙は一枚に収めてください。裏面も利用してください。計算問題は、「答のみ」を記入してください。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それを見て、「自分で丸付け」の上、その結果を(当然、名前と学籍番号を記入した上で..)提出してください。

問題 1 次の行列の階数 (Rank) を求めよ 問題 3 次の複素ベクトル v の長さ $|v|$ を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Q.1

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - 2i \\ -3 + 3i \\ 1 - i \\ -1 + 3i \\ -3 + 2i \\ -3 - i \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$v = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2i \\ 0 \\ -i \\ 2 - 2i \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

問題 2 次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 4 次の連立一次方程式を解きなさい

Q.1

$$\begin{cases} 4x_1 & & & + 2x_4 = 8 \\ - 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -14 \\ - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -19 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 13 \\ - 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 11x_4 + 4x_5 = -52 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 9 \\ - 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6 \end{cases}$$

問題 5 次の二つの複素ベクトル u, v の内積 (u, v) を求めなさい

Q.1

$$u = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 3 - 3i \\ 3 + 3i \\ 3 + 2i \\ 1 - i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -3 + 2i \\ 0 \\ 3 - i \\ -1 - 2i \end{pmatrix}$$

Q.2

$$u = \begin{pmatrix} -2 + i \\ 2i \\ 3 + i \\ -2 + 2i \\ 1 - 2i \\ -1 + 2i \\ 2 - 2i \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ -1 + 2i \\ -1 + 2i \\ -i \\ -3 \\ -2 + 3i \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

問題 6

配布した自分のレポート点に不信・不満があれば、それを述べなさい。逆に、特に問題がない場合は「なし」と答えなさい(注意:回答がなかった場合は、「なし」とみなします)。

代数学幾何学 (A/B) 小テスト [解答] (2009/07/16)

問題 1 次の行列の階数 (Rank) を求めよ

A.1

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,1;1)$; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-1)$; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;6)$; 2 列目に 1 列目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;-6)$; 3 列目に 1 列目を -6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;-9)$; 4 列目に 1 列目を -9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;9)$; 5 列目に 1 列目を 9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; -\frac{1}{2})$; 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,2;3)$; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 5 & -6 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;-5)$; 4 行目に 2 行目を -5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

左 $R(5,2;4)$; 5 行目に 2 行目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;1)$; 3 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;2)$; 4 列目に 2 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,5;-\frac{3}{2})$; 5 列目に 2 列目を $-\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(4,3;1)$; 4行目に3行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(5,3;-1)$; 5行目に3行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3,5;\frac{5}{2})$; 5列目に3列目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(5,4;1)$; 5行目に4行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(4,5;1)$; 5列目に4列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(5,2)$; 5行目を2倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 5

A.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(1, 1)$ が0なので、0でない要素を探したところ、 $(2, 1)$ に0でない

い要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1行目と2行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,1;2) ; 4行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;-1) ; 5行目に1行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-1) ; 2列目に1列目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;1) ; 3列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(4,2)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,4) ; 2行目と4行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(5,2;1) ; 5行目に2行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

問題 2 次の行列の逆行列を求めなさい

A.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1/3) ; 2 行目を -1/3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-8) ; 3 行目に 2 行目を -8 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 8/3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;3) ; 3 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;-1) ; 1 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 2行目に3行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;4)$; 1行目に2行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{5})$; 1行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-2)$; 2行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;1)$; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,2;1)$; 4行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;5)$; 4行目を5倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{3}{5})$; 1行目に4行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-\frac{6}{5})$; 2行目に4行目を $-\frac{6}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{3}{5})$; 3行目に4行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;1)$; 1行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;2)$; 2行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問題 3 次の複素ベクトル v の長さ $|v|$ を求めなさい

A.1

$$|v| = \sqrt{67}$$

A.2

$$|v| = 2\sqrt{5}$$

問題 4 次の連立一次方程式を解きなさい

A.1

$$\begin{cases} 4x_1 & & & + 2x_4 = 8 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -14 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -19 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -3 & -1 & -14 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -19 \end{array} \right)$$

1行目を $\frac{1}{4}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 & -14 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -19 \end{array} \right)$$

2行目に1行目を5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -3 & \frac{3}{2} & -4 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -19 \end{array} \right)$$

3行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -3 & \frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -19 \end{array} \right)$$

4行目に1行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -3 & \frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -27 \end{array} \right)$$

2行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -27 \end{array} \right)$$

3行目に2行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -27 \end{array} \right)$$

4行目に2行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{4} & -21 \end{array} \right)$$

4行目に3行目を $-\frac{15}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} & -66 \end{array} \right)$$

4行目を $\frac{2}{33}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

3行目に4行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

2行目に4行目を $-\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

1行目に4行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

2行目に3行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = & 4 \\ x_2 = & -5 \\ x_3 = & -4 \\ x_4 = & -4 \end{cases}$$

A.2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 13 \\ -6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 11x_4 + 4x_5 = -52 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 9 \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{22}{67} & \frac{69}{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1086}{67} & \frac{6516}{67} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ -6 & -5 & 3 & -11 & 4 & -52 \\ 4 & 5 & -4 & 9 & 2 & 9 \\ -4 & 1 & -5 & -3 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

2行目に1行目を6倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 4 & 5 & -4 & 9 & 2 & 9 \\ -4 & 1 & -5 & -3 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

3行目に1行目を-4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 1 & -28 & 1 & -6 & -43 \\ -4 & 1 & -5 & -3 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

4行目に1行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 1 & -28 & 1 & -6 & -43 \\ 0 & 5 & 19 & 5 & 6 & 46 \end{array} \right)$$

3行目に2行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 0 & -67 & 0 & -22 & -69 \\ 0 & 5 & 19 & 5 & 6 & 46 \end{array} \right)$$

4行目に2行目を-5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 0 & -67 & 0 & -22 & -69 \\ 0 & 0 & -176 & 0 & -74 & -84 \end{array} \right)$$

3行目を $-\frac{1}{67}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{22}{67} & \frac{69}{67} \\ 0 & 0 & -176 & 0 & -74 & -84 \end{array} \right)$$

4行目に3行目を176倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 1 & 16 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{22}{67} & \frac{69}{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1086}{67} & \frac{6516}{67} \end{array} \right)$$

4列目と5列目を交換

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 16 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{67} & 0 & \frac{69}{67} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1086}{67} & 0 & \frac{6516}{67} \end{array} \right)$$

4行目を $-\frac{67}{1086}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 16 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{67} & 0 & \frac{69}{67} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

3行目に4行目を $-\frac{22}{67}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 16 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

2行目に4行目を-16倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 39 & 0 & 1 & 122 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

1行目に4行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 & 2 & 25 \\ 0 & 1 & 39 & 0 & 1 & 122 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

2行目に3行目を-39倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 & 2 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

1行目に3行目を -6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -p_4 + 2 \\ x_2 = -p_4 + 5 \\ x_3 = 3 \\ x_5 = -6 \\ x_4 = p_4 \end{cases}$$

1行目に2行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

問題 5 次の二つの複素ベクトル u, v の内積 (u, v) を求めなさい

A.1

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 1-3i \\ 3-3i \\ 3+3i \\ 3+2i \\ 1-i \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1+2i \\ -3+2i \\ 0 \\ 3-i \\ -1-2i \end{array} \right) &= (1-3i) \times \overline{(1+2i)} + (3-3i) \times \overline{(-3+2i)} \\ &+ (3+3i) \times \overline{(0)} + (3+2i) \times \overline{(3-i)} \\ &+ (1-i) \times \overline{(-1-2i)} \\ &= (1-3i) \times (1-2i) + (3-3i) \times (-3-2i) \\ &+ (3+3i) \times (0) + (3+2i) \times (3+i) \\ &+ (1-i) \times (-1+2i) \\ &= (-5-5i) + (-15+3i) + (0) + (7+9i) \\ &+ (1+3i) \\ &= -12+10i \end{aligned}$$

A.2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2+i \\ 2i \\ 3+i \\ -2+2i \\ 1-2i \\ -1+2i \\ 2-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-3i \\ -1+2i \\ -1+2i \\ -i \\ -3 \\ -2+3i \\ 1+i \end{pmatrix} &= (-2+i) \times \overline{(1-3i)} + (2i) \times \overline{(-1+2i)} \\ &+ (3+i) \times \overline{(-1+2i)} + (-2+2i) \times \overline{(-i)} \\ &+ (1-2i) \times \overline{(-3)} + (-1+2i) \times \overline{(-2+3i)} \\ &+ (2-2i) \times \overline{(1+i)} \\ &= (-2+i) \times (1+3i) + (2i) \times (-1-2i) \\ &+ (3+i) \times (-1-2i) + (-2+2i) \times (i) \\ &+ (1-2i) \times (-3) + (-1+2i) \times (-2-3i) \\ &+ (2-2i) \times (1-i) \\ &= (-5-5i) + (4-2i) + (-1-7i) + (-2-2i) \\ &+ (-3+6i) + (8-i) + (-4i) \\ &= 1-15i \end{aligned}$$

問題 6

Q. 配布した自分のレポート点に不信・不満があれば、それを述べなさい。逆に、特に問題がない場合は「なし」と答えなさい(注意:回答がなかった場合は、「なし」とみなします)。

A. 次のいずれかの回答を行う。

(異論がない場合) 「なし」と答える。

(異論がある場合)

異論の内容を述べ、更に e-mail で、2009/07/18 までに、

`kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp`

宛に、次の内容のメールを送ってください。

(表題) 「代数幾何 A の演習点に対する異論」としてください。

(内容) 自分の「学籍番号」、「氏名」、「不満の内容」を記入してください。

なお、この時、gmail を利用してください。携帯電話からのメールは不可です。