代数学幾何学 (A/B) 小テスト [問題] (2008/07/17)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 解答用紙は一枚に収めてください。裏面も利用してください。計算問題は、「答のみ」を記入してください。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1

実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 2　実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$$

をもちいて導け。

問題 3　n 次の正方行列 A, B において、$AB = BA$ が成立する時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

問題 4

次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 5

次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 6

次の複素ベクトル v の長さ $|v|$ を求めなさい

Q.1

$$v = \begin{pmatrix} -1+2i \\ -1+2i \\ 3i \\ -3-i \\ 2+3i \end{pmatrix}$$

Q.2

$$v = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 3-2i \\ -1+i \\ -3-3i \\ 3-3i \\ -1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 (A/B) 小テスト [解答] (2008/07/17)

問題 1

Q. 実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

A. $a + bi$ が $x^3 + px + q = 0$ の根なので、これを x に代入すると、次のような等式が成立する。

$$\begin{aligned} (a+bi)^3 + p(a+bi) + q &= ((a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i) + p(a+bi) + q \\ &= (a^3 - 3ab^2 + pa + q) + (3a^2b - b^3 + b)i \\ &= 0 \end{aligned}$$

仮定より p, q, a, b は何れも実数なので、これより、次の二つの等式 (式 1) が成立することが解る。

$$(\text{式 } 1) \begin{cases} a^3 - 3ab^2 + pa + q = 0 \\ 3a^2b - b^3 + b = 0 \end{cases}$$

一方、同様にして、元の方程式の x に、 $a - bi$ を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} (a-bi)^3 + p(a-bi) + q &= ((a^3 - 3ab^2) - (3a^2b - b^3)i) + p(a-bi) + q \\ &= (a^3 - 3ab^2 + pa + q) - (3a^2b - b^3 + b)i \\ &\quad \text{ところが、先の (式 1) の二つの等式を代入すると..} \\ &= 0 - 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

すなわち、$a - bi$ も、この方程式の根である。残る三つ目の根を α とすれば、根と係数の関係[1]より、

$$(a + bi) + (a - bi) + \alpha = 0$$

よって、

$$\alpha = -2a$$

すなわち、$-2a$ もこの方程式の根となる。

[1]根と係数の関係を利用せず、いきなり、元の式の x に、$(-2a)$ を代入し、(式 1) を利用して、元の方程式を満す事を確認してもよい。

問題 2

Q. 実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を複素数 $\alpha,\ \beta$ についての等式

$$\mid \alpha \mid\mid \beta \mid=\mid \alpha\beta \mid$$

をもちいて導け。

A. $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ とすると、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ |\beta| &= \sqrt{c^2+d^2} \\ \alpha\beta &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ |\alpha\beta| &= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)}^2\sqrt{(c^2+d^2)}^2 \\ &= |\alpha|^2|\beta|^2 \\ &= (|\alpha||\beta|)^2 \\ & \quad \text{ここで、与えられた仮定 } |\alpha||\beta| = |\alpha\beta| \text{ を利用すると} \\ &= (|\alpha\beta|)^2 \\ &= (\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2})^2 \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 3

Q. n 次の正方行列 A, B において、$AB = BA$ が成立する時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

A. まず、次の補題を示す。

補題 $AB = BA$ ならば $B^k A = AB^k$ である。

証明 k に関する、帰納法で示す。

($k = 1$ の時) $B^k A = B^1 A = BA = AB = AB^k$ なので、$k = 1$ の場合に与式が成立する。

($k = n$ が成立すると仮定して、$k = n + 1$ を示す) $B^k A = B^{n+1} A = B^n BA = B^n AB$。ここで帰納法の仮定より、$B^n A = AB^n$ なので、$B^n AB = AB^n B = AB^{n+1} = AB^k$ となり、$k = n$ の場合を仮定して、$k = n + 1$ の場合にも与式が成立することを示す事ができた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$B^k A = AB^k$ である。

更に、上記の補題を利用して、与えられた等式 ($(AB)^k = A^k B^k$) を k に関する帰納法で示す。

($k = 1$ の時) $(AB)^k = (AB)^1 = AB = A^1 B^1 = A^k B^k$ なので、$k = 1$ の場合に与式が成立する。

($k = n$ が成立すると仮定して、$k = n + 1$ を示す) 左辺 $= (AB)^k = (AB)^{n+1} = (AB)^n (AB)$ となるが、帰納法の仮定より、$(AB)^n = A^n B^n$ なので、$(AB)^n (AB) = A^n B^n AB$ となる。ここで、上記の補題より、$B^n A = AB^n$ なので、$A^n B^n AB = A^n AB^n B = A^{n+1} B^{n+1} = A^k B^k$ となり、$k = n$ の場合を仮定して、$k = n + 1$ の場合にも与式が成立することを示す事ができた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$(AB)^k = A^k B^k$ である。

問題 4

次の行列の階数 (Rank) を求めよ

A.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 2) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,2) ; 1 列目と 2 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;1) ; 4 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;−2) ; 5 行目に 1 行目を −2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,3;−3) ; 3 列目に 1 列目を −3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;2) ; 4 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;4) ; 5 列目に 1 列目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,2;−1) ; 4 行目に 2 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

左 R(5,2;2) ; 5 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;−5) ; 3 列目に 2 列目を −5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

右 R(2,4;1) ; 4 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5;6) ; 5 列目に 2 列目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 3) に 0 でな

い要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,4) ; 3 行目と 4 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;$-\frac{1}{5}$) ; 3 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(5,3;-8) ; 5 行目に 3 行目を -8 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,5;1) ; 5列目に3列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank $= 3$

A.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;-2) ; 2 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;-2) ; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;1) ; 5 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;1) ; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;1) ; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;−3) ; 4 列目に 1 列目を −3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;−1) ; 5 列目に 1 列目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,3) ; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,2;1) ; 3 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

左 R(4,2;−1) ; 4 行目に 2 行目を −1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

左 R(5,2;3) ; 5 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;2) ; 4 列目に 2 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 4) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(3,4) ; 3 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;−1) ; 3 行目を −1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,3;−2) ; 4 行目に 3 行目を −2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

左 R(5,3;6) ; 5 行目に 3 行目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,5;2) ; 5 列目に 3 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

対角要素 (4, 4) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 5) に 0 でない要素をみつけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(4,5) ; 4 列目と 5 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(5,4;9) ; 5 行目に 4 行目を 9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank} = 5$

問題 5

次の行列の逆行列を求めなさい

A.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;$-\frac{1}{3}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-1) ; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;3) ; 2 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;$\frac{2}{3}$) ; 1 行目に 3 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左 R(2,3;1) ; 2 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;$\frac{1}{3}$) ; 1 行目に 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;−1) ; 1 行目を −1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;−1) ; 2 行目に 1 行目を −1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;$-\frac{1}{2}$) ; 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;−1) ; 3 行目に 2 行目を −1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;2) ; 3 行目を 2 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;5) ; 1 行目に 3 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

左 R(2,3;$\frac{5}{2}$) ; 2 行目に 3 行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;−2) ; 1 行目に 2 行目を −2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 6

次の複素ベクトル v の長さ $|v|$ を求めなさい

A.1

$$|v| = \sqrt{42}$$

A.2

$$|v| = \sqrt{70}$$