代数学幾何学 (A/B) 小テスト [問題] (2010/01/21)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 解答用紙は一枚に収めてください。裏面も利用してください。計算問題は、「答のみ」を記入してください。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で丸付け」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1

n 次の多項式からなる線型空間 $(\{\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \mid c_i \ (i = 0..n) \in \boldsymbol{R}\})$ 上の線型変換 $T_b : f(x) \to f(x+b)$ の基底 E に関する行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{aligned} b &= -2 \\ E &= < x - 2x^2,\, x^2,\, 1 - 2x + x^2 > \end{aligned}$$

Q.2

$$\begin{aligned} b &= 2 \\ E &= < 2 - 4x + 5x^2,\, 2 - 5x + 6x^2,\, 3 - 6x + 8x^2 > \end{aligned}$$

問題 2

次の行列の行列式を求めなさい

Q.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Q.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

問題 3

線型空間 $(\{a\cos\theta + b\sin\theta \mid a, b \in \boldsymbol{R}\})$ の、次の二組の基底 E, F に対して、E から F への基底の変換行列を求めなさい。

Q.1

$$\begin{aligned} E &= \ < \cos\theta - \sin\theta,\ \sin\theta > \\ F &= \ < -2\cos\theta - \sin\theta,\ \cos\theta > \end{aligned}$$

Q.2

$$\begin{aligned} E &= \ < -3\cos\theta + \sin\theta,\ -2\cos\theta + \sin\theta > \\ F &= \ < 5\cos\theta - 2\sin\theta,\ -2\cos\theta + \sin\theta > \end{aligned}$$

問題 4

次の連立方程式をクラーメルの公式を用いて解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = -3 \\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 29 \\ -8x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -40 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 12x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -47 \\ -10x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 34 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

問題 5

次の二つの複素ベクトル u, v の内積 (u, v) を求めなさい

Q.1

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \\ -2+2i \\ 3 \\ -2-3i \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 3+i \\ -i \\ 0 \\ -3+i \\ 1-2i \\ -3-3i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

Q.2

$$u = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -3+2i \\ -3-2i \\ -1 \\ -1+2i \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -2-3i \\ -3 \\ 2+2i \\ 2 \\ 3+2i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 (A/B) 小テスト [解答] (2010/01/21)

問題 1

n 次の多項式からなる線型空間 $(\{\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \mid c_i\ (i=0..n) \in \boldsymbol{R}\})$ 上の線型変換 $T_b : f(x) \to f(x+b)$ の基底 E に関する行列を求めなさい。

A.1

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 12 \\ -14 & 5 & 16 \\ -10 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 16 \\ -44 & -51 & -72 \\ 28 & 34 & 45 \end{pmatrix}$$

問題 2

次の行列の行列式を求めなさい

A.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

A.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

問題 3

線型空間 $(\{a\cos\theta + b\sin\theta \mid a, b \in \boldsymbol{R}\})$ の、次の二組の基底 E, F に対して、E から F への基底の変換行列を求めなさい。

A.1

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4

次の連立方程式をクラーメルの公式を用いて解きなさい。

A.1

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

A.2

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

問題 5

次の二つの複素ベクトル u, v の内積 (u, v) を求めなさい

A.1

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \\ -2+2i \\ 3 \\ -2-3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ -i \\ 0 \\ -3+i \\ 1-2i \\ -3-3i \\ -3+i \end{pmatrix}\right) = & \quad (1) \times \overline{(3+i)} + (3-2i) \times \overline{(-i)} \\
+ & \quad (1) \times \overline{(0)} + (1+3i) \times \overline{(-3+i)} \\
+ & \quad (-2+2i) \times \overline{(1-2i)} + (3) \times \overline{(-3-3i)} \\
+ & \quad (-2-3i) \times \overline{(-3+i)} \\
= & \quad (1) \times (3-i) + (3-2i) \times (i) \\
+ & \quad (1) \times (0) + (1+3i) \times (-3-i) \\
+ & \quad (-2+2i) \times (1+2i) + (3) \times (-3+3i) \\
+ & \quad (-2-3i) \times (-3-i) \\
= & \quad (3-i) + (2+3i) + (0) + (-10i) \\
+ & \quad (-6-2i) + (-9+9i) + (3+11i) \\
= & \quad -7+10i
\end{aligned}
$$

A.2

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 2+2i \\ -3+2i \\ -3-2i \\ -1 \\ -1+2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-3i \\ -3 \\ 2+2i \\ 2 \\ 3+2i \\ 1+3i \end{pmatrix}\right) = & \quad (2+2i) \times \overline{(-2-3i)} + (-3+2i) \times \overline{(-3)} \\
+ & \quad (-3-2i) \times \overline{(2+2i)} + (-1) \times \overline{(2)} \\
+ & \quad (-1+2i) \times \overline{(3+2i)} + (1) \times \overline{(1+3i)} \\
= & \quad (2+2i) \times (-2+3i) + (-3+2i) \times (-3) \\
+ & \quad (-3-2i) \times (2-2i) + (-1) \times (2) \\
+ & \quad (-1+2i) \times (3-2i) + (1) \times (1-3i) \\
= & \quad (-10+2i) + (9-6i) + (-10+2i) + (-2) \\
+ & \quad (1+8i) + (1-3i) \\
= & \quad -11+3i
\end{aligned}
$$