代数学幾何学 A/B (公式集 No.1)

栗野俊一*
<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>
http://edu-gw2.math.cst.nihon-u.ac.jp/~kurino/index.html

2009/06/04 (Ver. 0.2b)

1 平面図形

1.1 直線と点の距離

直線 $ax + by = c$ と、点 (x_0, y_0) の距離は次の公式で計算できる。

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.2 内積

二つの平面ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の内積 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は次のように計算される。

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + y_1y_2$$

*日本大学 理工学部 数学科

1.3 行列式

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は次のように計算される。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1.4 平面の射影子

平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (と平行な平面上の直線) への射影子 $T_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表現される。

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

また、これに対応する行列は次のように与えられる。

$$A_{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ba}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

この結果、平面のベクトル (に平行な平面上の直線) への射影子は、次のように行列とベクトルの積で表現される。

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = A_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{x}$$

2 空間図形

2.1 平面と点の距離

平面 $ax + by + cz = d$ と、点 (x_0, y_0, z_0) の距離は次の公式で計算できる。

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2.2　内積

二つの空間ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の内積 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は次のように計算される。

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

2.3　外積

二つの空間ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ は次のように計算される。

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

2.4　行列式

3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} |A| &= \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

2.5　空間の射影子

2.5.1　ベクトル (に平行な空間内の直線) への射影子

空間ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (に平行な空間内の直線) への射影子 $T_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表現される。

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

また、これに対応する行列 $A_{\boldsymbol{v}}$ は、次のように与えられる。

$$A_{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{ab}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{ba}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{ca}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{cb}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

この結果、空間のベクトル (に平行な空間内直線) への射影子は、次のように行列とベクトルの積で表現される。

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = A_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{x}$$

2.5.2　空間内の平面への射影子

空間内の平面 $ax + by + cz = d$ への射影子 $S_{\boldsymbol{u}}$ は、空間ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ への射影子 $T_{\boldsymbol{u}}$ を用いて、次のように表現される (ここで、$\boldsymbol{u}$ は、与えられた平面に垂直なベクトルになっていることに注意)。

$$S_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - T_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}$$

また、これに対応する行列 $B_{\boldsymbol{u}}$ は、$A_{\boldsymbol{u}}$ を用いて、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
B_{\boldsymbol{u}} &= E - A_{\boldsymbol{u}} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & -\dfrac{ab}{a^2+b^2+c^2} & -\dfrac{ac}{a^2+b^2+c^2} \\ -\dfrac{ba}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & -\dfrac{bc}{a^2+b^2+c^2} \\ -\dfrac{ca}{a^2+b^2+c^2} & -\dfrac{cb}{a^2+b^2+c^2} & \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この結果、空間のベクトルに垂直な空間内の平面への射影子は、次のように行列とベクトルの積で表現される。

$$S_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = B_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = (E - A_{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{x}$$

2.6 平面と空間の射影子のまとめ

	ベクトル $\boldsymbol{v}$ に平行な直線への射影子	ベクトル $\boldsymbol{u}$ に垂直な平面への射影子
平面	$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} = A_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{x}$ $A_{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ba}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$	—
空間	$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} = A_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{x}$ $A_{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{ba}{a^2+b^2+c^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{ca}{a^2+b^2+c^2} & \frac{cb}{a^2+b^2+c^2} & \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$	$S_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - T_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u} = B_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x}$ $B_{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{ab}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{ac}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{ba}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{bc}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{ca}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{cb}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$

3　一般の行列の計算

3.1　行列の等値

(m,n) 型の行列 $A=(a_{ij})$ と (k,l) 型の行列 $B=(b_{pq})$ が**等しい** ための条件は、次の二つが成立することである。

(型が同じ) $(m,n)=(k,l)$ すなわち、$m=k$ かつ $n=l$ 。

(成分が同じ) 任意の i,j $(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$ に対して、$a_{ij}=b_{ij}$。

3.2　行列の和

行列の和は、型が同じ行列の間でのみ定義され、その結果の型も同じになる。共に、(m,n) 型の二つの行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ の和 $A+B=C=(c_{ij})$ は、(m,n) 型になり、その和の成分の値は、加える行列の成分同士の和となる。すなわち、$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$ である。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2m}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

3.3　行列の積

行列の積は、異なる型の行列間でも定義されるが、かけられる行列の行の長さ (列の数) と、かける行列の列の長さ (行の数) が一致しなければならない。また、その結果の型は一般に、かける行列の型にもかけられる行列の型にも一致しないことが多い。

(l,m) 型の行列 $A=(a_{ij})$ と、(m,n) 型の行列 $B=(b_{jk})$ の場合は、積 $AB=C=(c_{ik})$ が定義され、その結果は (l,n) 型となり、その成分は次のようになる。

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{im}b_{mk}\ (i=1,2,..,l;\ k=1,2,..,n)$$