代機 B (公式集)

栗野俊一 [*]

2009/11/19 (Ver. 0.2)

http://edu-gw2.math.cst.nihon-u.ac.jp/%7Ekurino

1 複素ベクトルの内積

1.1 内積の定義

n 次複素ベクトル全体の集合 $\boldsymbol{C}^n$ (要素が複素数 ($\boldsymbol{C}$) であるような n 次元ベクトルの集合) の二つの要素

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して、この二つのベクトルの**内積 (エルミート積)** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は次のように定義[1]される。

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

この定義から、左のベクトルの要素は、そのまま (x_i) 利用するが、右のベクトルの要素は共役複素数 $(\overline{y_i})$ にするので、**左右で対称性がない**事に注意する。

この事は、次の内積の性質に影響する。

* 日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

[1] Text p.61 式 (1)

1.2 内積の性質

内積の性質[2] は以下の通り。

$$
\begin{array}{lll}
\text{共役線型性} & \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \end{array} \right\} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{(和が外に出せる)} \\ \left. \begin{array}{l} (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ (左の場合はそのまま)} \\ (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ (右の場合は共役複素数の形)} \end{array} \right\} \quad \text{(定数倍が外に出せる)} \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{(交換すると共役複素数になる)} \end{array} \right. \\
\text{正値性} & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0, \ ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) &
\end{array}
$$

自分自身との内積が 0 になるのは、そのベクトルが $\boldsymbol{0}$ ベクトルの時のみ。逆に $\boldsymbol{0}$ ベクトルでない場合は、正の実数 (0 より大きい実数) になる。

(注意)

- この内積の新しい定義は、これまでやった実数ベクトルでも、そのまま成立するので、以前に学んだ定義の**一般化** になっている。
- 複素数を扱う様になった事によって、共役複素数への変換が必要になり、この結果、次の二つの公式が以前と変ったので注意!!

$$
\begin{array}{ll}
(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \text{(定数を外に出す時に、右側の場合は共役複素数が出る)} \\
(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} & \text{(交換すると共役複素数になる)}
\end{array}
$$

- 内積の値は一般に複素数になる (実数になるとは限らない) が、「自分自身との内積」は常に非負の実数になる。

1.3 長さ (ノルム) の定義

自分自身との内積の負でない平方根を、そのベクトル ($\boldsymbol{x}$) の**長さ (ノルム)** と呼び、$|\boldsymbol{x}|$ [3]で表す[4]。

$$
|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}
$$

[2]Text p.61-61 定理 [6.1] の式 (2)-(5)
[3]これは、$\boldsymbol{x}$ の「長さ」または、「ノルム」である。絶対に「絶対値」と読んではいけない..。
[4]Text p.62 式 (6)

1.4 長さ (ノルム) の性質

長さに関して次の性質が成り立つ[5]。

$\lvert(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rvert \leq \lvert\boldsymbol{x}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{y}\rvert$	(等式の成立は、二つのベクトルが平行な場合)	(シュヴァルツの不等式)
$\lvert\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rvert \leq \lvert\boldsymbol{x}\rvert+\lvert\boldsymbol{y}\rvert$	(等式の成立は、平行かつ向きが等しい場合)	(三角不等式)

2 行列式

2.1 行列式の定義

n 次正方行列[6] $A=(a_{i,j})\,(a_{i,j}\in\boldsymbol{C})$ に対して、次の和で定義される複素数

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\mathrm{sgn}\ \sigma\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}\right)$$

を、行列 A の**行列式** と呼び[7]

$$|A|,\ |a_{i,j}|,\ \det A,\ \det\,(\boldsymbol{a}_1,..\boldsymbol{a}_n)\ (\boldsymbol{a}_1,..\boldsymbol{a}_n \text{ は } A \text{ の列ベクトル})$$

などで表す。

2.2 行列式の性質

A を n 次正方行列とすると、次のような等式が成り立つ

定数倍 $|cA\models c^n|A|$: 定数倍の行列式は行列式の定数の n 乗倍

> **(注意)** $|cA|=|c||A|$ とする間違いが多い !! これは誤り。同様に $|A+B|=|A|+|B|$ とする間違いも多い !! これも誤り。

転置行列 $|{}^tA|=|A|$: 転置の行列式は変らない。

> **(注意)** この公式は非常に重要。これによって、「行列式に関して、行に関する性質と列に関する性質はいつでも一緒に成立する」ことが解る。したがって、以下、行(または列) に関する性質を示せば、自動的に、列 (または行) の性質が示された事になる。

[5] Text p.62 定理 [6.2] の式 (7),(8)

[6] 行列式は、正方行列以外には意味がないことに注意しよう。敢て、正方でない行列に対する行列式を定義するとすれば、それは、常に 0 になると考えてもよいかもしれない.

[7] $|A|$ を A の絶対値とは絶対に ...

n 重線型性と交代性質 次の行列式に関する二つの性質は本質的[8]

n 重線型性

列の和 $\det\,(\boldsymbol{a}_1,..,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{a}'_j,..,\boldsymbol{a}_n)=\det\,(\boldsymbol{a}_1,..,\boldsymbol{a}_j,..,\boldsymbol{a}_n)+\det\,(\boldsymbol{a}_1,..,\boldsymbol{a}'_j,..,\boldsymbol{a}_n)$

定数倍 $\det\,(\boldsymbol{a}_1,..,c\,\boldsymbol{a}_j,..,\boldsymbol{a}_n)=c\,\det\,(\boldsymbol{a}_1,..,\boldsymbol{a}_j,..,\boldsymbol{a}_n)$ (これは、行の定数倍を行う基本操作が行列式に与える効果を意味している)

交代性 $\tau\in S_n$ の時、$\det\,(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\boldsymbol{a}_{\tau(2)},..,\boldsymbol{a}_{\tau(n)})=\mathrm{sgn}\,\tau\,\det\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,..,\boldsymbol{a}_n)$ (特に、τ が互換の場合を考えると、交換の基本操作が行列式に与える効果を表している)

等しい列 (列) を持つ行列の行列式 A の二つの列 (行) が一致すれば $|A|=0$

和の基本操作 A のある列に他のある列の定数倍を加えて作られる行列の行列式は $|A|$ (つまり、一つの行に他の行の定数倍を加える基本操作は、行列式の値を変化させない)

n 重線型性と交代性を持つ関数 n 個の列ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n$ に対して、$F(\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n)\in\boldsymbol{C}$ を対応させる写像 F が、n 重線型性と交代性を満すならば、

$$F(\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n)=F(\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n)\cdot\det\,(\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n)$$

となる[9]。

行列の積 $|AX|=|A|\cdot|X|$: 行列の積の行列式は、行列式の積になる。

2.3 特別な形の行列の行列式

右上、あるいは左下に零行列の小行を持つ行列の行列式 対称区分け[10]を行った結果、右上、あるいは左下が零行列の場合は、行列式が単純化される。

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{11} & O \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$$

A_{11} の次元が 1 の場合 更に、A_{11} が 1 次元の場合は、単純に行列式の次元が一つ下げられることに注意。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[8] こちらを行列式の定義としている本もある

[9] n 重線型性と交代性を持つ関数 F は行列式の定数 $(F(\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n))$ 倍になっているという事を意味する

[10] 対称区分けなので、A_{11},A_{22} が正方行列になる。なお、零行列の部分は、別に正方行列である必要はない。

(注意) これは、後の**行列式の展開** の特別な場合、行列式の次元を下げるために利用される。

ヴァンデルモンドの行列

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i) = \Delta(x_1, .., x_n) \ (\text{差積})$$

2.4 小行列式と余因子

定義 (小行列式) n 次正方行列 A の第 i 行、第 j 列目を取り除いてできる小行列式を A の第 (i,j) **小行列式** と呼び $\Delta_{i,j}$ で表す。

定義 (余因子) n 次正方行列 A の第 (i,j) 小行列式 $\Delta_{i,j}$ に $(-1)^{i+j}$ を掛けてできる値 $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ を A の第 (i,j) **余因子** と呼び $\tilde{a}_{i,j}$ で表す。

2.5 行列式の展開

行列式は、特定な行、列の要素と、余因子を使って表現 (展開) することができる。

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \quad (\forall j = 1, 2, .., n) \quad (j \text{ 列に関する展開}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \quad (\forall i = 1, 2, .., n) \quad (i \text{ 行に関する展開}) \end{aligned}$$

元の行列式の次数 n に対して、余因子 (の中に現れる小行列式) の次数は $n-1$ となるので、行列式の展開を利用することにより、行列式の計算において、「行列式の次数を引き下げる」効果がある。

次数を下げるかわりに、項目数が増大する。一般に、n 次の行列式を、$n-1$ 次式に展開すると、n 個の項が現れる。そこで、基本変形を利用して、展開する列 (行) の要素のほとんどを 0 にすることにより、展開よって増える項目数を減らすことが、展開を使った、行列式の計算の基本戦略となる。

2.6　行列式と逆行列、連立方程式

逆行列 A が正則であれば、A の逆行列 A^{-1} は次の様に、行列式を用いて、表現することができる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\tilde{a}_{i,j}) \quad (\text{ただし、} \tilde{a}_{i,j} \text{ は } |A| \text{ の } (i,j) \text{ 余因子})$$

クラメルの公式 連立方程式 $Ax = b$ で、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)$ が正方行列 (つまり、変数の個数と式の本数が同じ) の場合で、かつ、A の行列式 $|A|$ が 0 でない時、次のようにして連立方程式を解く事ができる。

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \, (\text{ただし,} |A_i| = \det(\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_{i-1}, b, \boldsymbol{a}_{i+1}, .., \boldsymbol{a}_n) (\text{即ち、} |A| \text{ の第 } i \text{ 列目を } b \text{ に入れ替えたもの}))$$