# 代機 B (公式集 2)

栗野俊一 [*]

2009/12/24 (Ver. 0.1d)

## 目 次



[*] 日本大学 理工学部 数学科 <kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

# 1　線型空間

## 1.1　線型空間の定義

**定義 1 (線型空間の定義)** **線型空間**[1]とは、次の**線型空間の公理**を満すような**演算 (和と、スカラー倍) が定義されている集合**の事を指す。

代機 A で学んだ、平面ベクトルの集合や、空間ベクトルの集合、そして、一般に、$n$ 次元の列ベクトル全体の集合などは、線型空間の例になっている[2] 。

## 1.2　線型空間の公理

**定義 2 (線型空間の公理)** $\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{R}$*(*実数*)* あるいは $\boldsymbol{C}$*(*複素数*)* とする時、集合 $V$ が次の二つの条件 *(I),(II)* を満す時、$V$ を **($\boldsymbol{K}$-) 線型空間**[3] と呼ぶ。

**(I. 和の公理)** $V$ の二つの元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して**和** と呼ばれる第三の元 *(* これを 「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$」 で表す *)* が定まり、次の法則が成り立つ。

- **(1)** $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ 　*(*結合法則*)*
- **(2)** $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ 　*(*交換法則*)*
- **(3)** **零ベクトル (零元)** と呼ばれる特別な元 *(*これを 「$\boldsymbol{o}$」 で表す*)* が、ただ一つ存在し、$V$ の全ての元 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が成り立つ。 　*(*零元の存在*)*
- **(4)** $V$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}$ となる $V$ の元 $\boldsymbol{x}'$ が存在する。これを $\boldsymbol{x}$ の**逆ベクトル (逆元)** といい、「$-\boldsymbol{x}$」で表す。 　*(*逆元の存在*)*

**(II. スカラー倍の公理)** $V$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$, と、$\boldsymbol{K}$ の任意の要素 $a$ に対して **$\boldsymbol{x}$ の $a$ 倍 (スカラー倍)** と呼ばれるもう一つの $V$ の元 *(* これを 「$a\boldsymbol{x}$」で表す *)* が定まり、次の法則が成り立つ。

[1] Text p.96 上から 2 行目の **定義**

[2] なので、もし、**「線型空間」** と言われたら、とりあえず、それは、**「空間ベクトル全体の集合」**なんだと思うことにしよう。もちろん、線型空間の要素は、ベクトル (数が並んだもの..) とは限らず、(線型空間の公理を満すような..) 関数だったり、数列だったり、ベクトル以外の様々なものである可能性があるのだが..。「例」を考える時には、「とりあえず、ベクトル」で例を考え、もし、それで駄目だったら、もう少し (線型空間の性質に着目して..)、考えると良い。

[3] Text p.96 上から 2 行目の **定義**

**(5)** $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$

**(6)** $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$

**(7)** $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$

**(8)** $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

この条件 *(I), (II)* の事をあわせて**線型空間の公理** と呼ぶ。

**定義 3 (実線型空間と複素線型空間)** $\boldsymbol{K}-$ 線型空間の $\boldsymbol{K}$ が複素数 *($\boldsymbol{C}$)* の時、その線型空間は、**複素線型空間** と呼び、$\boldsymbol{K}$ が実数 *($\boldsymbol{R}$)* の時、その線型空間は、**実線型空間** と呼ぶ[4]。

## 1.3 線型空間の例

**例 1 (空間のベクトル全体 ($V^3$))** 空間のベクトル全体の集合 $V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ は、**ベクトルの和**ならびに、**ベクトルの実数倍**に関して、実線型空間となる[5]。

**例 2 (2 次の正方行列 ($M_{2,2}$))** *2* 次の正方行列 $M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{C} \right\}$ は、**行列の和**ならびに、**行列の複素数倍**に関して、複素型空間となる。

**例 3 (波 ($W$))** 集合 $W = \{\, a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \boldsymbol{R} \,\}$ に対して、次のように**和** と **スカラー倍** を**定義する**。すると、この集合 $W$ は、**この和とスカラー倍に対して、実線型空間となる**[6] 。

**和** $f, g \in W$ とする時、$h = g + f \in W$ を、$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ で定義する[7]。特に、$f = a_1\cos x + b_1\sin x, g = a_2\cos x + b_2\sin x$ とすれば、$h = f + g = (a_1 + a_2)\cos x + (b_1 + b_2)\sin x \in W$ となる。

**スカラー倍** $f \in W, c \in \boldsymbol{R}$ とする時、$h = cf \in W$ を、$h(x) = (cf)(x) = c(f(x))$ で定義する[8]。特に、$f = a_1\cos x + b_1\sin x$ の時、$h = cf = c(a_1\cos x + b_1\sin x) = (ca_1)\cos x + (cb_1)\sin x \in W$ となる。

[4] Text p.96 上から 2 行目の **定義**

[5] このように、集合に対して、**和とスカラー倍の演算が定義**されていて、その**演算が、線型空間の公理を満せ**ば、**その集合が、その和とスカラー倍に関して線型空間** になる。ということは、同じ集合であっても、異なる和や、スカラー倍を定義すれば、異なる線型空間になることに注意しよう。

[6] ここで定義した**和** と **スカラー倍** は、きちんと、**線型空間の公理** を満していることを確認する必要がある (もし、満していなければ、線型空間にならない)。「これは線型空間か ?」という問題に対する、基本的な対応方法は、「そこで定義されている、和とスカラー倍が、線型空間の公理を満しているかどうかを判定」し、もし、全ての条件を満しているならば、「はい」、そうでなければ「いいえ」と答えることになる。

[7] 最初の $f+g$ の 「+」 は、$W$ **の要素に関する和**として、ここで新たに定義する 「+」 であるが、二番目の $f(x)+g(x)$ の 「+」は、**関数の値 (実数値) の和**、すなわち、**単なる実数の和** である。

[8] 上記の和 (+) と同様、**関数のスカラー倍** を **関数値の実数倍** で定義している。

**例 4** ($n$ **項** ($\boldsymbol{K}-$) **列ベクトル全体の集合** ($K^n$)) $\boldsymbol{K}$ の要素を縦に $n$ 個並べた、列ベクトル

*($n$ 項縦ベクトル)* 全体の集合 $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, .., x_n \in \boldsymbol{K} \right\}$ は、線型空間である[9]。

**例 5** **(変った例)** 二次の正方行列 $M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{C} \right\}$ に対して、次のように**和** と**スカラー倍** を定義する。

**和** $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ に対して、**和** $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}$ を $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ c_2 - c_1 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$ で定義する。

**スカラー倍** $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, c \in \boldsymbol{C}$ に対して、**スカラー倍** $c\boldsymbol{e}$ を $\begin{pmatrix} ca_1 & b_1 \\ c_1 & cd_1 \end{pmatrix}$ で定義する。

すると、$M_{2,2}$ は、**この和とスカラー倍に対して線型空間になっていない**。実際に、$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ c_2 - c_1 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 - b_2) \\ -(c_2 - c_1) & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & b_2 - b_1 \\ c_1 - c_2 & d_2 + d_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{e}$ なので、公理の *I-2(交換法則)* が成立しない[10] 。

ところが、二次の対角行列全体の集合 $D_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in \boldsymbol{C} \right\}$ を考えると、この $D_{2,2}$ は、先の和と、スカラー倍に関して、線型空間となる。

# 2 計量空間

## 2.1 計量空間

**定義 4** **(計量空間)** **内積** が定義されている[11] 線型空間のことを**計量空間**[12] と呼ぶ[13] 。

---

[9]代機 A で学んだように、この $K^n$ は最も、基本的な線型空間となる。線型空間の性質は、全てこの $K^n$ を基本に作られており、もし、線型空間の性質を知りたければ、$K^n$ に関して考えればよい。実際に、後で述べるように、**どのような線型空間に対しても (線型空間として、同じ性質をもつ) 同型な** $K^n$ **が存在する**ことが示されるので、**与えられた線型空間の (線型空間としての..) 性質**は、すべて、その同型な $K^n$ の性質から導くことができるので、$K^n$ だけを考えればよいことになる。

[10]この様に、線型空間でないをことを示すには、**公理の条件のいずれか一つだけでも、成立しない**ことを示すだけでよい。

[11]ここでの**内積** とは、次の**内積の公理**を満すような演算のことである。

[12]Text p.120 上から 2 行目の **定義**

[13]このように集合 S が特定な性質 C を満す時に、この S を改めて C 空間 S と呼ぶことになる。

## 2.2 内積の公理系

**定義 5 (内積の公理)** $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間 $V$ の二元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、$\boldsymbol{K}$ の元 *(これを「$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$」で表す)* が定まり、次の性質を持つとき、この $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を**内積**[14]と呼ぶ。

**(IV. 内積の公理)**

**(1)** $\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \end{cases}$

**(2)** $\begin{cases} (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$

**(3)** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$

**(4)** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ は *0* または正の実数であり、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の時に限る。

## 2.3 計量空間の例

**例 6** $V^3$ は、**空間ベクトルの内積** に対して計量空間になっている[15] 。

**例 7** $K^n$ の場合、二つの要素 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ と内積を定義すれば、この内積に関して、$K^n$ は、計量空間になる。

**例 8** $M_{2,2}$ の場合、二つの要素 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2} + d_1\overline{d_2}$ と内積を定義すれば、この内積に関して、$M_{2,2}$ は、計量空間になる。

**例 9** $W$ の場合、二つの要素 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x, g(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$ に対して、$(f, g) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ と内積を定義すれば、この内積に関して、$W$ は、計量空間になる。

**例 10** $W$ の場合、二つの要素 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x, g(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x$ に対して、$(f, g) = f(0)g(0) + f(\dfrac{\pi}{2})g(\dfrac{\pi}{2})$ と内積を定義[16] すれば、この内積に関して、$W$ は、計量空間になる。

---

[14] Text p.120 上から 4 行目

[15] **空間ベクトルの内積** が、**内積の公理** を満すことは調べる必要があるが、これは、代機 A で、既に学んでいる。

[16] これは、先と異なる内積の定義である。$W$ の場合は、このように定義しても内積になることが解る。

## 2.4 直交

**定義 6 (直交)** 計量空間 $V$ の二つの要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、その内積の値が *0* になる時 *(* すなわち $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ の時 *)*、この二つの要素は、互いに**直交する**[17] と言う。

**例 11** $W$ の二つ要素 $\cos x + \sin x, \cos x - \sin x$ は、互いに直交している。実際に、

$$
\begin{aligned}
(\cos x + \sin x, \cos x - \sin x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\ dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x - \sin^2 x\ dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}(\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)) \\
&= \frac{1}{2}(0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と、内積が *0* になる。

## 2.5 長さ (ノルム)

**定義 7 (長さ (ノルム))** 計量空間 $V$ の要素 $\boldsymbol{v}$ に対して、自分自身との内積の正の平方根 $\sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ を、$\boldsymbol{v}$ の**長さ (ノルム)**[18] [19]と呼び、$|\boldsymbol{v}|$ で表す。

[17]Text p.120 上から 16 行目
[18]Text p.120 上から 15 行目
[19]計量空間の**計量** とは、要するに、**長さ (や、角度..)** を測ることができる 空間ということ。

**例 12** $W$ の要素 $\cos x + \sin x$ の長さ $|\cos x + \sin x|$ は、$\sqrt{2\pi}$ となる。実際、

$$
\begin{aligned}
|\cos x + \sin x| &= \sqrt{(\cos x + \sin x, \cos x + \sin x)} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + \sin x)^2 dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\cos x \sin x) dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx} \\
&= \sqrt{[x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}[\cos(2x)]_{-\pi}^{\pi}} \\
&= \sqrt{(\pi - (-\pi)) - \frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(-2\pi))} \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}
$$

となる。

# 3 基底

## 3.1 線型結合

**定義 8 (線型結合)** $V$ を $\boldsymbol{K}$-線型空間とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ を $V$ の要素とする。これと、$\boldsymbol{K}$ の要素 $c_1, c_2, .., c_n$ を利用して作られる、次の *(形式の)* 要素 *(* これは、$V$ の要素になる *)* を、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ の**線型結合**[20]と呼ぶ[21]。

$$
c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{x}_i \quad (c_i \in \boldsymbol{K},\ \ \boldsymbol{x}_i \in V)
$$

**例 13** 線型空間 $M_{2,2}$ の二つの要素 $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。

$c_1\boldsymbol{e}+c_2\boldsymbol{f}$ の形をした要素が、$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の線型結合なので、例えば、$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ は、$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e} - 3\boldsymbol{f}$ と、**$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の線型結合の形で表すことができる** ので、$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の線型結合である。

[20] Text p.99 上から 11 行目

[21] ここでは、$\boldsymbol{x}_i\ (i = 1, 2, .., n)$ だけに着目しており、$c_i\ (i = 1, 2, .., n)$ の方には条件がないことに注意しよう。また、この結果として、$c_i$ の取り方が任意なので、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ の**線型結合には色々なものがある**事が解る。

逆に、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、どのような $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ に対しても、$c_1\boldsymbol{e} + c_2\boldsymbol{f}$ の形に表せない (どのような $c_1, c_2$ に対しても、$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の線型結合の $2,2$ 要素は必ず *0* になる) ので、これは $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の線型結合で表すことができない。

## 3.2　張る空間

**定義 9 (張る空間)** $V$ を $\boldsymbol{K}$-線型空間とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ を $V$ の要素とする。この時、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ の線型結合で表現できる要素全体の集合 $\{\, c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \mid c_1, c_2, .., c_n \in \boldsymbol{K} \,\}$ を、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ **が張る空間** と呼び、$< \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n >$ で表す。

**例 14** 線型空間 $M_{2,2}$ の二つの要素 $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。

$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ が張る空間 $< \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} >= \{\, c_1\boldsymbol{e} + c_2\boldsymbol{f} \mid c_1, c_2 \in \boldsymbol{C} \,\}$ には、$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ が含まれるが、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は含まれない。

**例 15** 線型空間 $V^3$ の三つの要素 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が張る空間は、$V^3$ 自身である (すなわち $V^3 =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 >$ である)。

**例 16** 空間のベクトル全体の集合 $V^3$ の四つの要素 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える。この時、この四つの要素が張る空間 $U =< \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} >$ を考えるとする。

すると、これには、$z$ 要素が $0$ であるような全てのベクトル (例えば、$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。これは、$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{z} (= 0\boldsymbol{w} + 1\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z})$ と、$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の線型結合で表

すことができるので、$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} >= U$ である。) が、$U$ に含まれるが、$z$ 要素が 0 でない要素 ( 例えば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) は $U$ に含まれない。

### 3.3 線型独立と線型従属

$\boldsymbol{K}$-線型空間 $V$ の要素 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, .., \boldsymbol{x}_n$ に関して、その線型結合 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{x}_i$ と零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を等式で結んだ式 ( 線型関係 ) を考える。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$$

これは、実は、係数 $(c_1, c_2, .., c_n)$ に関する連立方程式となっている。

そして、この係数を全て 0 にすれば、この等式は必ず成立するので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ は、常に、この線型関係の表す連立方程式の解になっている。この解を、**自明な解** と呼ぶ。

もし、この連立方程式の解が、この自明な解以外に存在しない場合、この $n$ 個のベクトルは互いに**線型独立** であるといい、逆に、もし、自明な解以外の解がある場合は、**線型従属** と呼ぶ。

**例 17** $V^3$ の二つの要素 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は互いに独立である。実際に $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{o}$ を満す $c_1, c_2$ は、自明な解である $c_1 = c_2 = 0$ 以外には存在しない。

**例 18** $V^3$ の三つの要素 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、それに $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、互いに従属である (独立でない) [22] 。実際に $c_1 = -3, c_2 = 2, c_3 = 1$ とすれば、$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となる。

**例 19** $W$ の要素 $f = \cos x + \sin x$ と $g = \cos x - \sin x$ は互いに独立である。

[22] この様に、二つの要素だけなら独立だが、これに他の要素を加えて三つにすると従属になってしまうようなことがおきる。

一般に、互いに従属な要素の集合に任意の要素を加えても従属のままであり、また、互いに独立な要素の集合から一つの要素を取り除いても、残りは独立のままである。

### 3.4　基底

**定義 10 (基底**[23]**)** 線型空間 $V$ の $n$ 個の要素 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ が、次の二つの性質を満す時、この $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ の組を、$V$ の**基底**と呼び、「$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$ [24]」で表す。

**1)** $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ は独立である。

**2)** $V$ の任意の要素は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ の線型結合で表すことができる *(* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ の張る空間、すなわち $< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$ [25]が $V$ に等しい *)*。

この時、要素の順序は重要である。同じ要素からなっていても、並べる順序が異れば、異なる基底と考える *(*$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >$ と $< \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 >$ は異なる基底*)*。

一般に要素の個数が多くなれば多くなるほど、それらが独立になるのが難しくなる。したがって、独立になるには、個数が少い方がよい。その一方、要素の個数が多ければ多い程、その線型結合によって表現できる要素の個数が多くなるので、張るためには、要素の個数が多い方が良いことにある。つまり**基底**は、独立と、張るという二つの相反した要求に共に答えることができるという意味で、ギリギリの条件を満す要素の組であるといえる。
この様なギリギリの条件を満すがため、次のような良い性質も持つことになる。

**定理 1 (基底による表現の一意性)** $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ が $V$ の基底ならば、$V$ の任意の要素 $\boldsymbol{v}$ は、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ の線型結合として**一意に表す** ことができる。

**例 20** $V^3$ の三つの要素 $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ は、$V^3$ の基底になっている。

**例 21** $M_{2,2}$ の四つの要素 $< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$ は、$M_{2,2}$ の基底になっている。

**例 22** $W$ の二つの要素 $< \cos x + \sin x, \cos x - \sin x >$ は、$W$ の基底になっている。

**例 23** $W$ の二つの要素 $< 2\cos x, -\sin x >$ は、$W$ の基底になっている。

---

[24]「張る空間」と「基底」が、異なる意味なのにも変らず、同じ記号で表現されている事に注意。本当は混同しやすいので、別の記号を用いた方が良いのだが...。
[25]ここでは、$< .. >$ を「張る」の意味で利用している (一つ前の脚注を参照の事)。

## 3.5 正規直交基底

**定義 11 (正規直交基底[26])** 計量空間 $V$ の基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$ が次の二つの条件[27]を満す時、この基底は、**正規直交基底**であると言う。

**正規性** $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ $(i = 1, 2, .., n)$ *(全ての要素の長さが 1 である)*

**直交性** $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ $(i, j = 1, 2, .., n, i \neq j)$ *(互いに異なる要素は互いに直交している)*

**例 24** $V^3$ の三つの要素 $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ は、$V^3$ の正規直交基底になっている。

**例 25** $V^3$ の三つの要素 $< \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ は、$V^3$ の正規直交基底になっている。

**例 26** $W$ の二つの要素 $< \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}(\cos x + \sin x), \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}(\cos x - \sin x) >$ は、$W$ の正規直交基底になっている。

## 3.6 次元

**定義 12 (次元[28][29])** 線型空間 $V$ が有限個 $n$ の要素からなる**基底** を持つ時、線型空間 $V$ の**次元** は $n$ *( これを 「$dim\, V$」で表す )* であり[30]、$V$ は **有限次元** を持つという。なお、有限個の基底が存在しない *(基底が無限個ある)* 場合は、$V$ は、**無限次元** を持つという[31] 。

**例 27** $V^3$ の次元は *3* である。

**例 28** $M_{2,2}$ の次元は *4* である。

**例 29** $W$ の次元は *2* である。

---

[27] これを、クロネッカーのデルタ $(\delta_{i,j})$ を用いて、単に一つの等式 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, .., n)$ で表す事もある。

[30] $V$ の基底は色々の場合が有り得る。しかし、どの場合であってもその基底を構成する要素の個数は、常に一定である。その一定の個数 $(n)$ が、その線型空間 $V$ の次元となるわけである。

[31] 無限であれ、有限であれ、$V$ が線型空間であれば、必ず、基底が存在する $(V = \{\boldsymbol{o}\}$ の場合だけは例外だが..)。

# 4　線型写像

## 4.1　線型写像の定義

**定義 13 (線型写像)** 二つの線型空間 $V, V'$ の間の写像 $T$ が、次の二つの条件 *(*この二つの条件を、**線型性** と呼ぶ*)* を満す時、この写像は、**線型写像**[32]であると言う。

**1)** $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$

**2)** $T(c\boldsymbol{x}) = cT(\boldsymbol{x})$

**例 30** $A$ を三次の実正方行列とする。空間ベクトルの集合 $V^3$ の要素 $\boldsymbol{x}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定義すれば、この写像 $T_A$ *(* これは、$V^3$ から $V^3$ の写像なので、変換になる*)* は、線型写像 *(*線型変換*)* となる。

**例 31** $W$ の要素 $f = a\cos x + b\sin x$ に対して、これを不定積分し、積分定数 $C$ を *0* とするような写像 $I(f) = \displaystyle\int f dx$ を考える。これは、$W$ から $W$ への変換になっている。実際、$I(a\cos x + b\sin x) = \int a\cos x + b\sin x \ dx = -a\sin x + b\cos x \in W$ となる。これは線型性を満すので、線型写像 *(*線型変換*)* となる。

　$I$ の線型性は、次のようにして確認することができる。

$$
\begin{aligned}
I(f+g) &= \int (f+g)dx \\
&= \int fdx + \int gdx \\
&= I(f) + I(g) \\
I(cf) &= \int cfdx \\
&= c\int fdx \\
&= cI(f)
\end{aligned}
$$

## 4.2　同型対応と同型

**定義 14 (同型対応)** $V$ から $V'$ への線型写像 $T$ が、全単写 *(*上への写像でかつ、一対一写像*)* の時、その写像 $T$ は、$V$ と $V'$ の間の**同型対応 (同型写像)**[33]であると言う。

**定義 15 (同型)** $V$ から $V'$ の間に同型対応が存在する時に、$V$ と $V'$ は**同型**[34]であると言う。

　二つの線型空間 $V, V'$ の間に同型対応が存在するという事は、何時でも二つの世界を (線型性を保ったまま..) 行たり来たりできることを意味する。この様な状態では、二つの世界を区別せず、同じものと考えてよい ( これを**同一視** と呼ぶ )。

[32]Text p.98 上から 3 行目の **定義**
[33]Text p.98 上から 14 行目の **定義**
[34]Text p.98 上から 14 行目の **定義**

### 4.3 基底による同型変換

**定義 16 (自然な対応)** 次元が $n$ である $\boldsymbol{K}-$ 線型空間 $V$ に対して、基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$ が与えられているとする。すると、$V$ から、$n$ 次元の列ベクトル全体の集合 $K^n$ との間に、次のような**自然な対応** $\varphi$ が定まる[35]。

$\boldsymbol{v} \in V$ を考えると、$E$ が基底なので、ある $c_1, c_2, .., c_n$ が一意に存在し、$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ と、$\boldsymbol{v}$ が、$E$ の要素の線型結合で表現できる。この $c_1, c_2, .., c_n$ に対して $K^n$ の要素 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ を対応させる。

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n \leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

自然な対応は、同型対応なので、**次元が $n$ の線型空間は、$K^n$ と同型である** ということが言える[36]。

# 5 後期試験に出る課題

### 5.1 基底の取り換え行列

**定義 17 (基底の取り換え行列)** $n$ 次元の $K-$ 線型空間 $V$ に対して、二つの基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$, $F =< \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, .., \boldsymbol{f}_n >$ が与えられたとする。また、この時、それぞれ $E, F$ によって定まる自然な対応を $\varphi, \psi$ とする。

すると、同一の $V$ の元、$v$ に対して、$K^n$ の元 $\varphi(v)$ と $\psi(v)$ が定まる。この二つの元の間の対応 $(T : \psi(v) \to \varphi(v))$ [37]は、$K^n$ から $K^n$ への同型変換 $(T = \varphi \cdot \psi^{-1})$ となる。

$K^n$ から $K^n$ への線型写像には、それに対応する行列 $P$ が存在し、$T(x) = T_P(x)$ となるようにできる。

この行列 $P$ を、**基底の取り換え $E \to F$ の行列**[38] と呼ぶ。

[35] これは、基底 $E$ 定めると、自動的に決る事に注意。従って、基底を示す場合に、その構成する要素だけでなく、その自然な対応を対 $(E; \varphi)$ で指定する事も多い。

[36] Text p.102 下から 9 行目の **定理 [3.7]**

[37] $\varphi(v) \to \psi(v)$ ではなく、$\psi(v) \to \varphi(v)$ であることに注意。

[38] Text p.105 下から 7 行目

**計算方法 1 (基底の取り換え行列の求め方)** 二つの基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >, F =< \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, .., \boldsymbol{f}_n >$ に対する、基底の取り換え $E \to F$ の行列 $P = (p_{ij})$ は、次の関係式[39]から、連立方程式を解く事によって求める事ができる。

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\boldsymbol{e}_j = p_{1i}\boldsymbol{e}_1 + p_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{e}_n \ (i = 1, 2, .., n)$$

**例 32** $W$ の二つの基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >=< \cos x + \sin x, \cos x - \sin x >$ と $F =< \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 >=< 2\cos x, -\sin x >$ を考え、基底の取り換え $E \to F$ の行列 $P = (p_{ij})$ を求める。

まず、$\boldsymbol{f}_1$ について考える[40]と、

$$\boldsymbol{f}_1 = \sum_{j=1}^{2} p_{j1}\boldsymbol{e}_j = p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2$$

となる[41]ので、これより、

$$2\cos x = p_{11}(\cos x + \sin x) + p_{21}(\cos x - \sin x)$$

よって

$$2\cos x = (p_{11} + p_{21})\cos x + (p_{11} - p_{21})\sin x$$

となる。これの $\cos x, \sin x$ の係数を比較すると、次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} 2 &= p_{11} + p_{21} \\ 0 &= p_{11} - p_{21} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} p_{11} &= 1 \\ p_{21} &= 1 \end{cases}$$

となる。

同様にして、$\boldsymbol{f}_2$ について考えると、

$$-\sin x = p_{12}(\cos x + \sin x) + p_{22}(\cos x - \sin x)$$

となり、

$$\begin{cases} 0 &= p_{12} + p_{22} \\ -1 &= p_{12} - p_{22} \end{cases}$$

[39]Text p.106 上から 10 行目の **式 (3)**
[40]$F$ から考えることに注意。
[41]$p_{j1}$ $(j = 1, 2, .., n)$ のように、**左**の添字が動く事に注意。

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} p_{12} &= -\dfrac{1}{2} \\ \\ p_{22} &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

となる。

これより、次のように $P$ を求める[42]ことができる。

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 5.2 基底に関する線型写像の行列

**定義 18 (基底に関する線型写像の行列)** $m$ 次元の $K-$ 線型空間 $V$ から $n$ 次元の $K-$ 線型空間 $V'$ への線型写像 $T$ を考える。更に、線型空間 $V, V'$ に対して、それぞれ基底 $(E, \varphi), (F, \psi)$ を定める。

$V$ の要素 $v$ に対して、$\boldsymbol{x} = \varphi(v)$ は、$m$ 項列ベクトルとなり、$v$ を一旦、$T$ で写し ($V'$ の元になる)、更に、それを $\psi$ で変換した像 $\boldsymbol{y} = \psi(Tv)$ は、$n$ 項列ベクトルとなる。この $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を対応付けると、この写像 $(\psi \cdot T \cdot \varphi^{-1})$ は、線型写像になるため、それに対応する $(m, n)$ 型行列 $A$ が定まる。

この $A = (a_{ij})$ を、**基底** $(E; \varphi), (F; \psi)$ **に関する** $T$ **の行列**[43] と呼ぶ。

**計算方法 2 (基底に関する線型写像の行列)** 線型写像 $T$ の二つの基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_m >$ $, F =< \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, .., \boldsymbol{f}_n >$ に関する行列は、次の関係式[44] から、連立方程式を解く事によって求める事ができる。

$$T\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{f}_j = a_{1i}\boldsymbol{f}_1 + a_{2i}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{f}_n \ (i = 1, 2, .., m)$$

**例 33** $W$ から $W$ への線型変換 $I$ の $W$ の二つの基底 $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 >=< \cos x + \sin x, \cos x - \sin x >$ と $F =< \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 >=< 2\cos x, -\sin x >$ に関する行列 $A = (a_{ij})$ を求める。

まず、$\boldsymbol{e}_1$ から[45]考える。

---

[42]結果的、それぞれ求めた連立方程式の解を**縦** に並べることに注意。
[43]Text p.113 下から 7 行目
[44]Text p.114 上から 9 行目
[45]$E$ に関して考える事に注意。

先ず $I$ は積分なので、

$$I(\boldsymbol{e}_1) = I(\cos x + \sin x) = \sin x - \cos x$$

となる。一方、

$$I(\boldsymbol{e}_1) = \sum_{j=1}^{2} a_{j1}\boldsymbol{f}_j = a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2$$

となる[46]ので、これより、

$$\sin x - \cos x = 2a_{11}\cos x - a_{21}\sin x$$

となり、これの $\cos x, \sin x$ の係数を比較すると、次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} -1 & = & 2a_{11} \\ 1 & = & -a_{21} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a_{11} & = & -\dfrac{1}{2} \\ a_{21} & = & -1 \end{cases}$$

となる。

同様にして、$\boldsymbol{e}_2$ について考えると、

$$I(\boldsymbol{e}_2) = I(\cos x - \sin x) = \sin x + \cos x$$

$$\sin x + \cos x = 2a_{12}\cos x - a_{22}\sin x$$

となり、

$$\begin{cases} 1 & = & 2a_{12} \\ 1 & = & -a_{22} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a_{12} & = & \dfrac{1}{2} \\ a_{22} & = & -1 \end{cases}$$

となる。

これより、次のように $A$ を求める[47]ことができる。

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

[46] $a_{j1}$ $(j = 1, 2, .., n)$ のように、**左**の添字が動く事に注意。

[47] 結果的に、それぞれ求めた連立方程式の解を**縦** に並べることに注意。

## 5.3　シュミットの直交化法

**定義** 19 (**シュミットの直交化法**) 計量空間 $V$ の基底 $A =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, .., \boldsymbol{a}_n >$ が与えられた時、**この基底に基いて、**$V$ **の正規直交基底** $E =< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n >$ **を求める** 事を考える[48] 。

　次の手順に従って、与えられた基底 $A =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, .., \boldsymbol{a}_n >$ から、正規直交基底を求める方法を**シュミットの直交化法**[49]と呼ぶ。

$\boldsymbol{e}_1$**:** $\boldsymbol{a}_1$ を正規化するだけ

**正規化** $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}$

$\boldsymbol{e}_2$**:** まず、射影を用いて直交化を行い、次に正規化を行う。

**直交化** $\boldsymbol{a}'_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$

**正規化** $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}'_2}{|\boldsymbol{a}'_2|}$

$\boldsymbol{e}_3$**:** 上記と同様、ただし、引く要素が増えている。

**直交化** $\boldsymbol{a}'_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$

**正規化** $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{a}'_3}{|\boldsymbol{a}'_3|}$

$\boldsymbol{e}_r$**:** 一般化

**直交化** $\boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{a}_r - (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - \cdots - (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{e}_{r-1})\boldsymbol{e}_{r-1}$

**正規化** $\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{a}'_r}{|\boldsymbol{a}'_r|}$

---

[48] $V$ の基底が様々あるように、$V$ の正規直交基底も色々ある。したがって、単に「正規直交基底を求めよ」という問題だと、答が沢山出る事になる。「シュミットの直交化法」は、基となる基底 $A$ から、一意に、ある特定な直交基底を求める方法であり、この場合、基底 $A$ が定まれば、それからシュミットの直交化法を利用して作られる正規直交基底 $E$ も、一通りに決る。

[49] Text p.121 上から 13 行目の **定義**