コンピュータ概論のレポート

— 西川先生の課題のレポートを TEX で作成する —

出題　2011/06/21
学科　数学科
学年　1 年
番号　9999
氏名　栗野俊一

1 課題:西川先生の 2005 年の集合論の課題の問題 2.1

1.1 問題

問題 2.1 次の集合について、元を列挙する形に書き直せ[1] 。

1. $\{x; x$ は実数であり、$x^2 - 2x - 3 = 0$ をみたす $\}$
2. $\{x; x$ は実数であり、$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ をみたす $\}$

1.2 回答

1. 与えられた条件 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を満す数を、「二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解く、公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$」を用いて求めると、3 と -1 の二つの解が得られる。これは何れも実数であるので、共に、要求されている条件を満す。また、これ以外には、与えられた条件を満す元は存在しない。

   したがって、これを、元を列挙する形にすると、$\{-1, 3\}$ となる。

   (答) $\{-1, 3\}$

2. 与えられた条件 $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ を満す数を求めるために、$x^3 + 2x^2 - x - 2$ を因数分解すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
&= x(x^2 + 2) - (x + 2) \\
&= x^2(x + 2) - (x + 2) \\
&= (x^2 - 1)(x + 2) \\
&= (x - 1)(x + 1)(x + 2)
\end{aligned}
$$

   よって、この方程式の解は、$-2, -1, 1$ の三つである。したがって、これを、元を列挙する形にすると、$\{-2, -1, 1\}$ となる。

   (答) $\{-2, -1, 1\}$

[1] http://trout.math.cst.nihon-u.ac.jp/%7Enisikawa/lectures/pdf/2005/calculus1/calculus1_03.pdf

2 課題:西川先生の 2005 年の集合論の課題の問題 2.2

2.1 問題

問題 2.2 次の命題を証明せよ。

1. $(A \subset B$ かつ $B \subseteq C) \Rightarrow A \subset C$
2. $(A \subseteq B$ かつ $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

注意 記号が、西川先生のものと違い、次のような形で定義されているとする。

部分集合 $A \subseteq B$ は部分集合を表す記号とし、$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$ と定義する。この場合は、$A = B$ の可能性[2]が残る事に注意する。

真部分集合 $A \subset B$ は真部分集合を表す記号とし、$A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ とする。すなわち、A の要素は全て、B に含まれる $(\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B])$ が、B の中に A の要素でないものがある $(\exists y[y \notin A \wedge y \in B])$ 。

2.2 回答

1. 結論は、$A \subset C$ すなわち、次の二点を示せばよい。

   (a) $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$

   証明

   $x \in A$ とすると $A \subset B$ なので $x \in B$ である。更に、$B \subseteq C$ なので、$x \in B$ ならば $x \in C$ なる。すなわち、$x \in A$ ならば $x \in C$ となるので、表記の命題が成立する。

   Q.E.D

   (b) $\exists y[y \notin A \wedge y \in C]$

   証明

   $A \subset B$ なので B の要素で A に含まれない要素がある。これを x_0 とする。すなわち、$x_0 \notin A \wedge x_0 \in B$ である。一方、$x_0 \in B$ で、$B \subseteq C$ なので、$x_0 \in C$ となる。すなわち、$x_0 \notin A \wedge x_0 \in C$ となるので、表記の命題が成立する。

   Q.E.D

2. 結論は、前問と同じである。前半は全く同じなので後半だけを示す。

   (a) $\exists y[y \notin A \wedge y \in C]$

   証明

   $B \subset C$ なので C の要素で B に含まれない要素がある。これを x_0 とする。すなわち、$x_0 \notin B \wedge x_0 \in C$ である。一方、$A \subseteq B$ なので、$x_0 \notin B$ ならば、$x_0 \notin A$ となる。すなわち、$x_0 \notin A \wedge x_0 \in C$ となるので、表記の命題が成立する。

   Q.E.D

[2] この場合、$A = B$ は、$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ で定義する。