

数学科 1 年(補習)

-- 「証明」とは ? (1) --

数学科 栗野 俊一

2013/10/07 補

伝言

私語は慎むように !!

□ 席は自由です

○ できるだけ前に詰めよう

□ 色々なお知らせについて

○ 栗野の Web Page に注意する事

<http://edu-gw2.math.cst.nihon-u.ac.jp/~kurino>

「証明」とは何か？

□「証明」とは (What) ?

○ある事柄が真理もしくは事実であることを明かにすること。また、その内容。(Wikipedia)

▶でも..「『真理/事実』である」とか、「『明か』にする」って..?

○参考

▶物理学の「真理」:「事実」の事..実験で確かめられるもの、実験の結果

○proof (証明) / prove (証明する)

▶人を「説得する」ための証拠を示す(「明か」の意味)

▶「日常語」としては、「証拠を示して、他の人を『説得する』こと」

○対象によって、「説得」は異なる

▶cf. 浮気がバレた? 慌てて弁解をする / 黙って情熱的なキスを..

□「証明」かどうかの判定

○相手が「納得」すれば良い

▶数学者同士:「これって明らかだよな」、「うんそうだね」

▶教員と学生:「長々と説明し..という訳で証明された」、「何にがなんだかサッパリ」

○同じ「証明(記述/例:『明らか』)」が状況によって「証明する事」にならない

▶「証明(を書く事)」が「難しく感じる」理由になっている

□誰もが認める「証明(記述)」はあるか？

○ある: 数学的な「証明」の定義

▶数学基礎論の分野の問題(志村先生に尋ねてみよう)

数学における「証明」

□「数学」は他の「学問」と異なる（「論理」のみを使って記述する）

○「真実」を示す事は「証明」にならない！！

▶ そもそも「数学に於ける真実」なんてものは存在しない

▶ 例 1: $1+1=2$ か？ No, 二進法では 10 になる

▶ 例 2: 三角形の内角の和は 180 度か？ No, 球面上では 180 度以上

○では、数学に於いて「『真実』として扱われるもの(根拠)」は？

▶ 関係者の間で「同意(前提と)されて」いる内容 (公理/定義)

▶ 例：十進法を使う / 平面上の図形を考える / 当事者間の「取り決め」

▶ 「数学の対象」に関する「公理/定義」が「真実」として「扱われ」る

○[注意] 数学は記憶の学問か？

▶ 基本的には、No だが、「定義/公理」を記憶していなければ「お話」にならない

□「数学」における「証明」とは？

○同意事項(定義/公理)に基いて「論理(推論)」によって「結論」を示す

▶ 真実から結論への「道筋」を「論理のみ」で示す

▶ [例] 東京(仮定)から熱海(結論)に行くには、東海道線の鈍行(論理)に乗って、まず新橋に行き、それから..

□「証明かどうか」の三つの指標 (採点基準 ; -P)

○根拠として、定義や公理と仮定のみを用いているか？

○命題と命題の関係が「論理」的に示されているか (適切な推論規則の利用)？

○仮定から結論までの全ての道筋が示されているか (定理も利用可)？

「推論」と「証明形式」

□「証明」の記述：基本は、「三段論法/三角ロジック」による「線引き」

○三段論法：「小前提」と「大前提」から「結論」を導く

- ▶ 小前提: ソクラテスは人間である
- ▶ 大前提: 全ての人間は死すべきものである
- ▶ 結論: ゆえにソクラテスは死すべきものである

○三段ロジック：「データ」と「理由付け」から「主張」を作る

- ▶ データ: 天気予報では、明日は雨
- ▶ 理由付け: 気象庁の天気予報は信頼してよい
- ▶ 主張: 明日は雨が降る

○鈍行論法：今の到着駅が解り、鈍行に乗れば、次の停車駅が解る

- ▶ 今の到着駅：東京駅
- ▶ 鈍行に乗る：東海道線では、東京駅の次の駅は、新橋である (山手だと異なる)
- ▶ 次の停車駅：新橋である

○「命題」という点(駅)を「論理」という線(路)で、結ぶのが「証明」

□「証明」全体

○「結論」を頂点とした「木」になる

- ▶ 枝は、中間結果で、葉は「根拠」
- ▶ それを結ぶのは、「論理(推論規則)」

「論理」と「定理」

□ 結局、「論理(推論)」とは

○「論理」は、既知の「命題」から新しい「命題」を導く仕組(書き換え規則)

▶「既知の命題が正し」ければ、「導かれた命題も正しい..」でない困る

▶ 数学ではそうしている (論理の健全性 : cf 志村先生)

○「論理」は数学以外でも使える (将棋の読み/企画の説得/etc..)

▶「論理的な思考ができる者」が「数学科の学生」(の筈...?)

□「定理」は「複数の推論結果」をまとめたもの

○ cf. 急行(「こだま」に乗ると、「東京」の次に「品川」に飛べる)

▶「定理」の証明は、「全体の証明の一部」になっている

○ 良く利用する「経路」は毎回示すのは面倒

▶ 一度だけ示して、「再利用」すればよい (思考の経済学)

「証明」は「形『式』」

□「数学の証明」をどう「記述」するか (How) ?

- 「証明」の「形式」を基いて「表現」すればよい

□「証明の形式」とは？

- まずは、「証明」は「日本語」の特殊な形式である事に注意

- ▶「証明」を「日本語として読めるかどうか」をチェックすべき
- ▶お願いだから、「主語、述語、目的語」を省かない様に

- 基本は、三段論法を繰り返す事

- ▶仮定から新しい事実を導き、それを出発点に次の事実を示す
- ▶結論が導かれれば証明終わり

□基本以外の証明形式

- 基本形以外の証明形式も幾つかある

- ▶その証明から「基本形」を誘導する事ができる場合 (cf. 対偶の証明等)
- ▶その証明が、対象の構造に着目している場合 (cf. 数学的帰納法)
- ▶その証明が、存在の具体性を必要としない場合 (cf. 背理法)

- なぜ、基本形以外がある (why) ? / 経済性

- ▶その方が、記述を簡潔にできる (cf. 対偶の証明等)
- ▶その方が、見通しが良くなる (cf. 数学的帰納法)
- ▶その方が、より一般的な命題を証明できる (cf. 背理法)

- 基本以外の形式を用いる場合は、「形式」をきちんと守る必要がある