数学科 1 年(補習)

--「証明」とは？(2) --

数学科 栗野 俊一

2013/10/21 補習

伝言

私語は慎むように !!

- 席は自由です
  - できるだけ前に詰めよう
- 色々なお知らせについて
  - 栗野の Web Page に注意する事

http://edu-gw2.math.cst.nihon-u.ac.jp/~kurino

「証明」の「形式」と「意味」

- □「証明」とは？(再)
  - ○「命題」が「正しい」い事(が納得できる記述)を「示す」事
    - ▹「命題」:ある事柄について断定的に述べた(事実と照し合わせて真偽が判定できる)表現

      「この教室には、10 人いる」、「三角形の内角の和は 180 度」、「現在の人口は 100 億」、「(x+y)^2=x^2+2xy+y^2」
- □ 命題の「正しい」さを「示す」には？
  - ○ モデル論的なアプローチ(直接法) :「命題」の「真偽値」を「計算」する
    - ▹ 具体的に確かめれば良い(無限回の操作になるかも..)
    - ▹「証明」の「一般的」なアプローチ (実験で確認)
  - ○ 証明論的なアプローチ(間接法) :「命題」を「書き換える」事で「明らか」な物にする
    - ▹ 合意事項(公理と仮定)から「推論規則」を用いて「命題」を導く
    - ▹「証明」の「数学」的なアプローチ(「論理」で示す)
  - ○ 二つのアプローチは同じ？
    - ▹ No, But 「完全性定理」:「どちらも使える」という命題が証明できる(場合がある..)
    - ▹ (一般に..?) モデル論より証明論の方が「効率」がよい(???)

証明論的なアプローチ

- 証明論的なアプローチ
  - 「証明」とは、次のような「基本的」な物 *のみ*
    - 1) 「公理」は「正し」い命題
    - 2) 「正しい命題」から「推論」で導かれた命題も「正し」い命題(定理)
    - 3) 上記の 1,2 のみが「正し」い命題(公理+定理)
  - 「基本的でない証明」は許されるか？
    - 「基本的でない証明(記述)」から「基本的な証明(記述)」を「作れれ」ばよい
    - 二つの証明(記述)が「同じ」である事を論ずる(「証明」が「論」の対象)
  - 「完全性定理」: 証明論的なアプローチの基礎
    - 証明論的「証明記述」が、モデル論的「証明」と「同じ(意味を持つ)」事が保証される
- 証明論的なアプローチのメリット
  - 「命題の書き換え」という「命題の意味を考えないくてよい操作」で「証明」ができてしまう
    - 「無意味」な「証明」もある事に..
  - 「形式」だけで「できる」のは確かに嬉しい..
- 高校までの数学では、「形式」への意識が希薄
  - 弊害 : いい加減な「形式」の選択と、「意味」への無配慮

「証明」は「形『式』」

- 「数学の証明」をどう「記述」するか (How) ?
  - 「証明」の「形式」を基いて「表現」すればよい
- 「証明の形式」とは ?
  - まずは、「証明」は「日本語」の特殊な形式である事に注意
    - 「証明」を「日本語として読めるかどうか」をチェックすべき
    - お願いだから、「主語、述語、目的語」を省かない様に
  - 基本は、三段論法を繰り返す事
    - 仮定から新しい事実を導き、それを出発点に次の事実を示す
    - 結論が導かれれば証明終わり
- 基本以外の証明形式
  - 基本形以外の証明形式も幾つかある
    - その証明から「基本形」を誘導する事ができる場合 (cf. 対偶の証明等)
    - その証明が、対象の構造に着目している場合 (cf. 数学的帰納法)
    - その証明が、存在の具体性を必要としない場合 (cf. 背理法)
  - なぜ、基本形以外がある (why) ? / 経済性
    - その方が、記述を簡潔にできる (cf. 対偶の証明等)
    - その方が、見通しが良くなる (cf. 数学的帰納法)
    - その方が、より一般的な命題を証明できる (cf. 背理法)
  - 基本以外の形式を用いる場合は、「形式」をきちんと守る必要がある

背理法

- 「背理法」とは
  - 「証明したい命題の否定(形)」を「仮定」とする事により「矛盾」を導く
    - 「矛盾」が導ければ、「仮定」は「偽」つまり「証明したい命題の否定(形)」は「偽」
    - だから、「「証明したい命題の否定(形)」の否定」は「偽」の否定で「真」
    - だから、「証明したい命題」は「真」という論法
  - 暗黙の内に次の二つの仮定をしている
    - 「P かつ ～P」が常に成立していない(矛盾律) : 一般的な仮定
    - 「P または ～P」が常に成立している(排中律) : 背理法の仮定
- 「矛盾」とは
  - 「矛盾」とは、特定な命題 P とその否定 ～P の両方が成立(証明できる)事
  - なぜ、「矛盾」は困る？
    - 「矛盾」であれば、任意の命題が「推論(証明)」できてしまう
    - 「矛盾」を含む「数学」では全ての命題が証明できる
    - 「矛盾」を含む「数学」は「意味のある議論ができない」
- 「背理法」が用いられる理由
  - 我々人間は意味のある議論ができる対象しか扱わない
  - 意味のある議論をするには、矛盾を含むようなものは対象としない
  - だから、「矛盾」を導く物は「正しくあってはならない」と考える
    - ただ、「正しくない事の反対が正しい(排中律)」という事は保証できない

「背理法」の弊害

- □「背理法」の構造的な問題点
  - ○背理法は(結果的に..)「偽」を仮定して、推論を行なっている
    - ▹ 導出された中間の命題(中間命題)も(「偽」を利用していれば..)真ではない
    - ▹ cf. 背理法以外の手法では、中間命題も真(定理)になっている
  - ○背理法では「中間命題の正しさ」は、「証明全体の正しさ」と無関係
    - ▹ 検算(途中までの証明があっているかどうか)を、中間命題の正しさで確認できない
    - ▹ cf. 背理法以外の手法では、「誤った命題が導かれた」ら、どこかで「推論間違い」している
- □「背理法」の弊害
  - ○「背理法」を多用すると、「中間命題」のチェックをしなくなる
    - ▹ 通常の証明法でも、「中間命題」のチェックをサボるのは致命的
  - ○「中間命題」の「正しさ」は、「モデル論」で確認できる
    - ▹「中間命題」のチェックをサボると「モデル論」の概念が失われる

大学数学での証明

- 大学数学での証明で気を付ける事
  - 「証明」の「証明論」的側面と「モデル論」的側面の両方に気を使う必要がある
    - 「講義」で、気を付けるべきは「モデル論」的側面
  - 黒板には、「証明論」的記述しかない事が多い(専門書もその傾向が..)
    - 「モデル論」的な説明は、「口頭で行われる」事が多い(だから「講義」が重要)
    - # だから、「板書を写している間に講義を聞き逃す」は「本末転倒」!!
- 証明と計算
  - 証明論上「証明」と「計算」はほとんど区別できない(する必要もない)
    - 「証明」と「計算」の比較すると、分岐が多く(量的問題)、日本語が難しい(表現的問題)の差があるだけ？

	数式	論理式 (日本語)
分岐なし 分岐あり	式の展開, 微分, 普通の計算, 因数分解, 積分	等式の証明 一般の証明

「証明」と「計算」の比較