解答者	ID: 数と 式 (答)	Date: 2014/05/09	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< – 8< –

1. **問**

$$\frac{1^2+3^2+5^2+7^2}{(64-1)^2+(49-4)^2+(36-9)^2+(25-16)^2}$$

答

$$\frac{1}{81}$$

2. **問** 次の各問に答えよ。

(a) $17x+13y=850$ を満す正の整数 x, y の組 (x, y) を全て求めよ。

(b) 不等式 $\log_2 x - 2\log_x 8 \leq 5$ を解け。

答 (a) $(x, y) = (37, 17), (24, 34), (11, 51)$

(b) $0 < x \leq \frac{1}{2}, 1 < x \leq 64$

3. **問** $2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$ を満す整数 x, y の値を全て求めなさい。

答 $(x, y) = (1, 2), (-1, 0)$

4. **問** $6x-y+3z=-2x+5y+9z=8x-5y+z$ を満すいずれも 0 でない実数 x, y, z は $x : y : z = [1] : (-[2]) : [3]$ である。また、$\dfrac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{[4][5]}{[6][7]}$ である。

答 [1] 3　[2] 1　[3] 5　[4] 3　[5] 3　[6] 3　[7] 5

5. **問** 不等式 $\log_2 x + \log_2 (x-1) < 1$ の解は、$[1] < x < [2]$ である。

答 [1] 1　[2] 2

6. **問** $(x+2y-2z)(x+2y-3z)-12z^2$ を因数分解しなさい。

答 $(x+2y-6z)(x+2y+z)$

7. **問** $\dfrac{1}{4-2\sqrt{3}}$ の整数部分を a、小数部分を b とするとき、a^2+ab+b^2 の値として正しいものを、次の (1) 〜 (5) から 1 つ選びなさい。

(1) $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{4}$　(2) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4}$　(4) $\dfrac{7+2\sqrt{3}}{4}$　(5) $\dfrac{9+2\sqrt{3}}{4}$

答 $\dfrac{7+2\sqrt{3}}{4}$

8. **問** k を正の実数とし、次の連立不等式について、問 1, 問 2 に答えなさい。

$$\begin{cases} 3(x+3k) & \geq & 7x-3k \\ 8x-9k+2 & \geq & 2(x+1) \end{cases}$$

問 1 $k=1$ の時、解の範囲に含まれる整数 x の個数を選びなさい。

(1) 5　(2) 4　(3) 3　(4) 2　(5) 1

					得点:
採点者	ID: 数と 式 (答)	Date:	学科:	番号:	名前:

解答者	ID: 数と 式 (答)	Date: 2014/05/09	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

問 2 解の範囲に含まれる整数 x が $5, 6, 7, 8, 9$ の 5 個になるような k の値の範囲を選びなさい。

(1) $3 \leq k < \frac{10}{3}$ (2) $3 < k \leq \frac{10}{3}$ (3) $3 < k < \frac{10}{3}$ (4) $3 \leq k \leq \frac{10}{3}$ (5) $2 < k \leq 3$

答 **問** 1 (4)

問 2 (1)

9. **問** 次の和 S を求めなさい。

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

答 $S = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

10. **問** $\sqrt{15}$ の整数部分を a、小数部分を b とするとき、$a^2 + 12b + 2b^2$ の値を求めなさい。

答 21

11. **問** 方程式 $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = \log_2(4x+2)$ を解きなさい。

答 $x = 4$

12. **問** 次の各問いに答えよ。

(a) ある 4 桁の自然数 N は、各位の数字を表す数の和が 3 の倍数になっている。このとき、N が 3 の倍数になっている事を説明せよ。

(b) a, b, c を実数とする。x の二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が、$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となる事を説明せよ。ただし、 $a \neq 0, b^2 - 4ac > 0$ とする。

答 (a) 千の位、百の位、十の位、一の位の数を、それぞれ a, b, c, d とすると、4 桁の自然数 N は、$N = 1000a + 100b + 10c + d$ と表せる。(a, b, c, d は整数, $1 \leq a \leq 9, 1 \leq b \leq 9, 1 \leq c \leq 9, 1 \leq d \leq 9$) これから、$N$ を次のように変形する事ができる。

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (999+1)a + (99+1)b + (9+1)c + d \\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

ここで、仮定より、各桁の数の和 $a + b + c + d$ は 3 の倍数なので、これを $3n$ (n は整数) とすると、これから、

$$\begin{aligned} N &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d) \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + 3n \\ &= 3(333a + 33b + 3c + n) \end{aligned}$$

と表現できる。a, b, c, n は何れも整数なので、$333a + 33b + 3c + n$ は整数である。従って、これを 3 倍した $3(333a + 33b + 3c + n) = N$ は 3 の倍数である。

					得点:
採点者	ID: 数と 式 (答)	Date:	学科:	番号:	名前:

解答者	ID: 数と 式 (答)	Date: 2014/05/09	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

(b) 与えられた式を次のように変形する。

$$
\begin{array}{rcll}
ax^2+bx+c &=& 0 & \text{(与式)} \\
x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a} &=& 0 & (a \neq 0 \text{ より、両辺を } a \text{ で割る}) \\
x^2+\dfrac{b}{a}x &=& -\dfrac{c}{a} & \left(\dfrac{c}{a}\text{を移項}\right) \\
x+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 &=& -\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 & \left(\text{両辺に}\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\text{を加える}\right) \\
\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 &=& \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} & \text{(平方完成)} \\
x+\dfrac{b}{2a} &=& \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & (b^2-4ac \geq 0 \text{ なので両辺の平方を取る}) \\
x &=& \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \left(\dfrac{b}{2a}\text{を移項}\right)
\end{array}
$$

これから、二次方程式の解の公式 $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を得る。この式変形は、双方向に行う事ができるので、x が元の方程式をの解である事と、x が上記の公式の形をしている事は同値である。

13. **問** $\sqrt{2}$ が無理数である事を証明しなさい。

答 $\sqrt{2}$ は実数であるので、$\sqrt{2}$ が有理数でない事を示せば、$\sqrt{2}$ が無理数である事が解る。$\sqrt{2}$ が無理数である事を背理法を用いてしめす。

($\sqrt{2}$ が無理数である事の背理法による証明) 実数 $\sqrt{2}$ が無理数でない、すなわち、有理数であると仮定する。$\sqrt{2}$ が有理数であれば、$\sqrt{2}>0$ であるので、互に素である正の自然数 p,q を用いて、$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ と表現できるはずである。ところが、これの両辺を二乗すると、$2=\dfrac{p^2}{q^2}$ すなわち、$2q^2=p^2$ となる。これより、左辺は 2 の倍数となるので、p^2 も 2 の倍数である。ここで、p が 2 の倍数でないとすると、その二乗も 2 の倍数ではないので、p^2 が 2 の倍数になるには p 自身が 2 の倍数でなけばならない。すなわち、p はある自然数 m を用いて $p=2m$ と表現する事ができる。これを元の式に代入すると $2q^2=p^2=(2m)^2=4m^2$ となる。これから、$q^2=2m^2$ が成り立つ事がわかる。この関係式から q もまた 2 の倍数である事が解るが、そうだとすると、p,q には共通因数である 2 があり、p,q が素であるという事に矛盾する。このように、「$\sqrt{2}$ が無理数でない」と仮定した事から、矛盾が導出されたので、この仮定「$\sqrt{2}$ が無理数でない」は偽である。したがって、この否定である「$\sqrt{2}$ が無理数である」は真である。

14. **問** $\dfrac{4}{3-\sqrt{7}}-\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ を計算した答えを選びなさい。

(1) $5+\sqrt{5}$　(2) $6+2\sqrt{5}$　(3) $4+3\sqrt{5}$　(4) $3+2\sqrt{7}$　(5) $12+\sqrt{7}$

答 (2)

15. **問** 整式 $x^{2012}+x^7+1$ を x^2+1 で割った余りは [　　　] である。

(1) x　(2) $x+1$　(3) $x+2$　(4) $-x$　(5) $-x+1$　(6) $-x+2$

					得点:
採点者	ID: 数と 式 (答)	Date:	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

答 (6)

16. **問** 三つの数 $\sqrt[4]{8}, 4^{\frac{1}{3}}, \sqrt[7]{16}$ を小さい順に並べたとき、正しく並んでいるものを次の (1)〜(5) の中から一つ選べ。

 (1) $\sqrt[7]{16} < \sqrt[4]{8} < 4^{\frac{1}{3}}$ (2) $\sqrt[7]{16} < 4^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{8}$ (3) $\sqrt[4]{8} < 4^{\frac{1}{3}} < \sqrt[7]{16}$ (4) $4^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{8} < \sqrt[7]{16}$ (5) $4^{\frac{1}{3}} < \sqrt[7]{16} < \sqrt[4]{8}$

答 (2)

17. **問** 1 から 100 までの整数の集合の中で 2 の倍数の集合を A, 3 の倍数の集合を B, 5 の倍数の集合を C とします。このとき、$A \cup B \cup C$ の要素の個数として正しいものを、次の (1)〜(5) の中から 1 つ選びなさい。

 (1) 68 (2) 71 (3) 74 (4) 75 (5) 77

答 (3)

18. **問** 整数 x, y の方程式 $3x + 5y = n \cdots (1)$ について、次の問いに答えなさい。ただし、n は整数とする。
 (a) $n = 1$ のとき、方程式 (1) をみたす整数 x, y の組を 1 組求めなさい。
 (b) $n = 1$ のとき、方程式 (1) をみたす整数 x, y の組を全て求めなさい。
 (c) 方程式 (1) をみたす整数 x, y の組を全て求めなさい。
 (d) $n = 2012$ のとき、方程式 (1) をみたす正の整数 x, y の組はいくつあるかを求めなさい。

答 整数 x, y の方程式 $3x + 5y = n \cdots (1)$ について、次の問いに答えなさい。ただし、n は整数とする。
 (a) $(x, y) = (2, 1)$
 (b) $(x, y) = (-5k + 2, 2k - 1)$ (ただし、k は整数)
 (c) $(x, y) = (-5m + 2n, 3m - n)$ (ただし、m, n は整数)
 (d) 134 組

19. **問** x, y が、$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満すとき、次の各問いに答えなさい。ただし、1 は答えのみでよい。
 (a) $(x + y - 1)^2 + (2x - y - 1)^2$ の値を最小にする x, y の値を求めなさい。
 (b) $(x + y - 1)^2 + (2x - y - 1)^2$ の最大値とそのときの x, y の値を求めなさい。

答 (a) $x = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{1}{3}$
 (b) $x = 0, y = 1$ の時、最大値 4

20. **問** 360 以下の自然数のうち、360 との最大公約数が 1 であるものをは全部で [ ] 個ある。

 (1) 96 (2) 108 (3) 120 (4) 240 (5) 252 (6) 264

答 (1)

21. **問** 複素数 z が、$2|z| = 3|z - 5 - 5i|$ を満すとき、次の各問いに答えなさい。
 (a) 複素数平面上で、点 $P(z)$ の軌跡を求めなさい。
 (b) 点 $P(z)$ は、$z = a$ のとき $|z|$ が最大となる。このとき、a を求めなさい。

					得点:
採点者	ID: 数と 式 (答)	Date:	学科:	番号:	名前:

解答者	ID: 数と 式 (答)	Date: 2014/05/09	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

答 (a) 点 $9+9i$ を中心とし半径の長さが $6\sqrt{2}$ の円である。

(b) $a = 15 + 15i$

22. **問** 方程式 $|x-1| + |x-2| = x+1$ を解きなさい。

答 $x = \dfrac{2}{3}, 4$

23. **問** 整数全体の集合 Z, 有限集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すこととします。全体集合 $U = \{k \| 100 \leq k \leq 300, k \in Z\}$ の部分集合を、$A = \{4k \| 4k \in U, k \in Z\}, B = \{6k \| 6k \in U, k \in Z\}, C = \{9k \| 9k \in U, k \in Z\}$ とするとき、次の値を求めなさい。

(a) $n(\bar{A})$

(b) $n(A \cup B)$

(c) $n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$

答 (a) 150

(b) 68

(c) 22

24. **問** 次の各問いに答えなさい。ただし、1 は答えのみでよい。

(a) 5429 と 9701 の最大公約数を求めなさい。

(b) n は 50 以下の自然数とする。このとき、$7n+41$ と $8n+44$ の最大公約数が 5 となるような n を全て求めなさい。

答 (a) 89

(b) $n = 2, 12, 22, 32, 42$

25. **問** 複素数 z が不等式 $|z| \leq |z-i| \leq 1$ を満たします。この複素数 z が複素平面上で描く図形の面積として正しいものを、(1)〜(4) の中から 1 つ選びなさい。

$$(1)\ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)\ \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3)\ \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad (4)\ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

答 (4)

					得点:
採点者	ID: 数と 式 (答)	Date:	学科:	番号:	名前: