解答者	ID: ベクトル	Date: 2014/05/23	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

1. 座標空間に、3 点 $\mathrm{A}(2,1,-1), \mathrm{B}(0,1,3), \mathrm{C}(1,0,-1)$ を通る平面 ABC と、点 $\mathrm{D}(4,-4,3)$ がある。次の (a)〜 (b) の各問に答えなさい。
   (a) 平面 ABC に垂直なベクトルを 1 つ求めよ
   (b) 点 D から平面 ABC に下した垂線の足を H とするとき、H の座標を求めよ。

2. $|\vec{a}+\vec{b}|=4, |\vec{a}-\vec{b}|=2$ の時、$|\vec{a}-2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$ の値として、正しい物を、次の 1 〜 5 の中から一つ選びなさい。

   (1) 26　(2) 50　(3) 72　(4) 74　(5) 76

3. $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1, \mathrm{OC}=2, \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}, \angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$ である四面体 OABC について、線分 AB, CA, CO, OB を $t:(1-t)\,(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ P, Q, R, S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として、次の各問いに答えなさい。
   (a) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めなさい。
   (b) 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある事を示しなさい。
   (c) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ を求めなさい。
   (d) 四角形 PQRS の面積 $f(t)$ を t を用いて表しなさい。また、$f(t)$ の取り得る範囲を求めなさい。

4. $\mathrm{OA}=2, \mathrm{OB}=1$ である △OAB において、∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とした時、$\mathrm{OC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であった。また、辺 OA 上に $\mathrm{OP}=m\,(1<m<2)$ となる点 P を取り、直線 PC と辺 OB の延長との交点を Q として、$\mathrm{OQ}=\mathrm{n}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えなさい。
   (a) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を使って求めなさい。
   (b) $3mn=2(m+n)$ が成り立つ事を証明しなさい。
   (c) △OPQ の面積を S とするとき、S の最小値と、その時の m の値を求めなさい。

5. xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0), \mathrm{B}(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ と、点 $\mathrm{C}(1,1,2)$ を中心として xy 平面に接する球面 S がある。また、S 上の点を D とする。ただし、D は 3 点 A, B, C を通る平面上にはないものとし、$0\leq\alpha\leq 2\pi$ とする。この時、次の (a)〜(c) の問に答えなさい。
   (a) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めなさい。ただし、答えのみを書なさい。
   (b) 四面体 ABCD の体積の最大値を求めなさい。
   (c) (b) のとき、点 D の座標を求めなさい。

6. △ABC において、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4, |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\dfrac{5}{2}$ とし、△ABC の内心を I とする。このとき、次の問に答えなさい。

					得点:
採点者	ID: ベクトル	Date:	学科:	番号:	名前:

(a) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を求めなさい。

(b) 直線 AI が、辺 BC と交わる点を D とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表しなさい。

(c) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表しなさい。

7. 3 点 $\mathrm{O, A, B}$ について、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 5, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3, \angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$ であり、$\angle\mathrm{AOB}$ の 2 等分線と線分 AB の交点を C とするとき、次の問に答えなさい。

   (a) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S を求めよ。

   (b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを求めよ。

   (c) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の大きさを求めよ。

8. $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に点 P があり、$13\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$ を満している。線分 AP の延長が辺 BC と交わる点を D とするとき、$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCD}$ を求めなさい。

9. 点 O を原点とする空間の 2 点 $\mathrm{A}(1, 3, 5), \mathrm{B}(6, -2, 10)$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b},$ とし、直線 AB 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とします。次の問 (a), (b) に答えなさい。

   (a) $|\vec{p}|$ が最小になる点 P の座標は ([　　　], [　　　], [　　　]) である。

   (b) (a) で求めた点 P と、点 O, A によってできる $\triangle\mathrm{OAP}$ の面積は、[　　　]$\sqrt{[\quad\quad]}$ である。

10. すべての辺の長さが 1 である正四角錐 $\mathrm{O-ABCD}$ について、辺 OA の中点を P、辺 OC を 3 : 1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき、次の (a)〜(d) の各問に答えなさい。

    (a) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。(答えのみでよい)

    (b) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。(答えのみでよい)

    (c) $\cos\angle\mathrm{PBQ}$ の値を求めよ。

    (d) 3 点 B, P, Q を通る平面と辺 OD との交点を R とするとき、OR : RD を求めよ。

11. k を実数とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ と同一平面上にある点 P が

$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{PC}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

    を満している。この時、次の問に答えよ。

    (a) $k = 0$ とする。直線 AP と直線 BC との交点を Q とするとき、BQ : QC を最も簡単な整数比で求めよ。

    (b) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の周上または、内部にあるような k の取り得る値の範囲を求めよ。

12. 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0), \mathrm{B}(0, -2, 0), \mathrm{C}(0, 0, -3)$ がある。空間内の点 P が等式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$ を満しながら、動くとき、次の問いに答えなさい。

解答者	ID: ベクトル	Date: 2014/05/23	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

(a) この点 P は、ある定点 Q から一律の距離にある。定点 Q の座標と、線分 PQ の距離を求めなさい。

(b) 定点 Q は平面 ABC 上にある事を証明しなさい。

(c) 四面体 ABCP の体積の最大値を求めなさい。

13. 1 辺の長さが 3 である正四面体 OABC がある。線分 AB を 1 : 2 に内分する点を P、線分 OC を 2 : 1 に内分する点を Q とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。

    (a) この時、$\mathrm{PQ} = \sqrt{[\quad\quad]}$ である。

    (b) 線分 PC の中点を M、線分 OM と PQ の交点を R とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{[\quad\quad]}{[\quad\quad]}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ である。

    (c) (b) の時、直線 AR と平面 OBC の交点を S とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{[\quad\quad]}{[\quad\quad][\quad\quad]}\vec{b} + \dfrac{[\quad\quad]}{[\quad\quad][\quad\quad]}\vec{c}$ である。

14. 四面体 OABC において、$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}, \mathrm{OB}\perp\mathrm{OC}, \mathrm{OC}\perp\mathrm{OA}, \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 3$ である。また、辺 AC を三等分する点を点 A に近い方からそれぞれ D, E とし、△OBC の重心を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき、次の各問いに答えよ。ただし、(a) は答えのみ記入せよ。

    (a) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

    (b) 直線 OD 上に点 P、直線 EF 上に点 Q を取る。線分 PQ の長さが最小になるとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

15. △OAB において、重心を点 G とし、直線 OB 上に点 H をとると、$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AH}$ となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, ∠OAB は鈍角とする。次の (a)〜 (b) の各問に答えなさい。

    (a) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表し、点 H が △OAB の外部にある事を示しなさい。

    (b) 辺 OA と直線 HG の交点を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表しなさい。

16. 平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が、$|5\vec{a} - 3\vec{b}| = 1, |3\vec{a} - 2\vec{b}| = 1$ を満すとき、内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

					得点:
採点者	ID: ベクトル	Date:	学科:	番号:	名前: