解答者	ID: 三角関数/数列	Date: 2014/06/13	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

1. $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, x > y$ に対して、$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 (x - y)$ が成り立つとき、次の問に答えなさい。
   (a) y を x の式で表せ。
   (b) $\sin x + \sin y$ の取り得る値の範囲を求めよ。

2. x の関数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + a(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$ $(0 \leq x \leq \pi)$ について、次の (a)〜 (c) の各問に答えなさい。ただし、a は定数とする。
   (a) $t = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ とおくとき、t の取り得る範囲を求めよ。
   (b) $f(x)$ を t で表せ。
   (c) 方程式 $f(x) = 0$ が $0 \leq x \leq \pi$ において、異る 3 つの実数解をもつとき、a の取り得る範囲を求めよ。

3. 平面上の曲線 C を
$$\begin{cases} x &= \sin t \\ y &= -\dfrac{1}{4}\sin 4t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$$
   で定義するとき、次の (a)〜 (b) の各問に答えなさい。ただし、$0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする。
   (a) y の最大値を求めよ。また、その時の x の値を求めよ。
   (b) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4. x の関数 $f(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin x\cos x$ について、次の (a)〜 (b) の各問に答えなさい。ただし、$0 \leq x < 2\pi$ とする。
   (a) $t = \sin x + \cos x$ とするとき、次の (1),(2) に答えよ。
      (1) t の取り得る値の範囲を求めよ。
      (2) $f(x)$ を t を用いて表せ。
   (b) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、その時の x の値もそれぞれ求めよ。

5. θ の関数 $y = -\sin 2\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta - 1\,(0 \leq \theta < 2\pi)$ がある。$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおく。
   (a) y を t の式で表すと $y = [\ \text{①}\ ]t^2 + [\ \text{②}\ ]t$ である。
   (b) t の範囲は、$-\sqrt{[\ \text{③}\ ]} \leq t \leq \sqrt{[\ \text{④}\ ]}$ である。
   (c) y は、$\theta = [\ \text{⑤}\ ], \dfrac{\pi}{[\ \text{⑥}\ ]}$ のとき、最大値 $[\ \text{⑦}\ ]$、$\theta = \dfrac{[\ \text{⑧}\ ]}{[\ \text{⑨}\ ]}\pi$ のとき、最小値 $[\ \text{⑩}\ ] - [\ \text{⑪}\ ]\sqrt{[\ \text{⑫}\ ]}$ をとる。

6. 曲線 $C : \begin{cases} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について、次の (a)〜 (c) の各問に答えなさい。ただし、a は正の定数とする。
   (a) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$ (n は 0 以上の整数) とする。$n \geq 2$ のとき、I_n を、n, I_{n-2} で表せ。

					得点:
採点者	ID: 三角関数/数列	Date:	学科:	番号:	名前:

解答者	ID: 三角関数/数列	Date: 2014/06/13	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

(b) 曲線 C と x 軸及び y 軸によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(c) 曲線 C 上の各点 $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線が、x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さは一定である事を示せ。

7. 関数 $f(x) = 8\sin^5 x + \cos^5 x\ \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値および最小値をもとめなさい。

8. $0 \leq \theta < 2\pi$ の時、関数 $y = \cos^2\theta - \sin\theta$ の最大値と最小値の組み合わせとして、正しいものを、次の (1)〜(5) の中から一つ選べ。

   (1) 最大値 $-\dfrac{1}{4}$ 最小値 -1 (2) 最大値 1 最小値 $-\dfrac{1}{4}$ (3) 最大値 $\dfrac{5}{4}$ 最小値 -1
   (4) 最大値 $\dfrac{5}{4}$ 最小値 $-\dfrac{1}{4}$ (5) 最大値 $\dfrac{5}{4}$ 最小値 1

9. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ (a_{n+2})^5 = (a_{n+1})^4 \cdot a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値は [①] である。

   (1) $\sqrt[6]{32}$ (2) $\sqrt[5]{16}$ (3) $2\sqrt[5]{2}$ (4) $2\sqrt[4]{2}$ (5) $\sqrt[3]{4}$ (6) $2\sqrt{2}$

10. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 48,\ a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 21 \cdot 2^{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められている。

    (a) $\{a_n\}$ の一般項目を求めよ。

    (b) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおくとき、S_n が最小となるような n の値を全て求めよ。

11. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{I_n\}$ について、次の (a)〜 (d) の各問に答えなさい。

    (a) 漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つことを証明しなさい。

    (b) $nI_nI_{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の値を求めなさい。

    (c) 不等式 $I_n > I_{n+1}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を証明しなさい。

    (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n^2$ を求めなさい。

12. 等差数列 $\{A_n\}$ において、$A_{10} = 22,\ A_6 = 10A_3$ であるとき、$A_n = 130$ を満す n の値を選びなさい。

    (1) 46 (2) 44 (3) 42 (4) 40 (5) 38

13. 数列 $\{a_n\}$ は、$2^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満す。このとき、次の (a)〜 (d) の各問に答えなさい。ただし、$\log 2$ は、2 の自然対数であり、$\log 2 = 0.6931$ とする。

    (a) $a_1,\ a_2$ を求めなさい。

	得点:

採点者	ID: 三角関数/数列	Date:	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

(b) $n > 1$ のとき、$a_n < \dfrac{1}{n}$ が成り立つ事を、二項定理を用いて示しなさい。

(c) すべての n について、$a_n > \dfrac{\log 2}{n}$ が成り立つ事を示しなさい。

(d) $2^{\frac{1}{345}}$ の値の小数部分は、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを求めなさい。また、その数字を求めなさい。

14. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ の和は [①] である。

(1) $\dfrac{1}{8}$ (2) $\dfrac{1}{12}$ (3) $\dfrac{1}{16}$ (4) $\dfrac{1}{20}$ (5) $\dfrac{1}{24}$ (6) $\dfrac{1}{60}$

15. 等差数列 $50, 47, 44, \cdots$ において、初項から第 [①] 項までの和が最大であり、初項から第 [②] 項までの和が初めて負となる。

16. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ とおくとき、$b_{n+1} = b_n +$ [①] となる。よって、一般項 $a_n = \dfrac{[\ ②\ ]n - [\ ③\ ]}{[\ ④\ ]n - [\ ⑤\ ]}$ である。

17. 数列 $\{a_n\}$ について、$S_n = n^2 - 3n$ が成り立つとする。ただし、S_n は初項 a_1 から第 n 項目 a_n までの和とする。

(a) 第 n 項目 a_n を求めると $a_n =$ [①]$n -$ [②] である。

(b) 和 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$ を求めると、[③]$n^2 -$ [④]n である。

18. 初項から第 4 項まので和が 120、第 5 項と第 6 項の和が 6 である等比数列 $\{a_n\}$ がある。ただし、公比は正の数とする。

(a) この数列の初項は [①] であり、公比 $\dfrac{[\ ②\ ]}{[\ ③\ ]}$ である。

(b) $\displaystyle\sum_{k=7}^{12} a_k = \frac{[\ ④\ ]}{[\ ⑤\ ]}$ である。

(c) 数列 $\{a_{2n-1} + a_{2n+1}\}$ は、初項 [⑥] 、公比 $\dfrac{[\ ⑦\ ]}{[\ ⑧\ ]}$ の等比数列である。

19. $p; q$ は定数とする。初項を a とする数列 $\{a_n\}$ が、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満している。この時、一般項 a_n を a, p, q を用いて表しなさい。

20. 数列 $\{a_n\}$ は、$a_1 = 3,\ a_n = \dfrac{4a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 4}\ (n = 2, 3, 4, \cdots)$ を満すとする。次の (a)〜 (b) の各問に答えなさい。

(a) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ は等比数列である事を証明しなさい。なお、初項と公比も明かにしなさい。

解答者	ID: 三角関数/数列	Date: 2014/06/13	学科:	番号:	名前:

– 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< — 8< –

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい。

21. 毎年はじめに、10 万円ずつ積立てると、5 年後には、元利合計はいくらになるか。年利率が 1% で 5 年間変らないものとして、1 年ごとの複利で計算せよ。ただし、$1.01^5 = 1.051$ とする。

22. $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し、それが正しいことを証明しなさい。

					得点:
採点者	ID: 三角関数/数列	Date:	学科:	番号:	名前: