

解答者	ID: 微分・積分	Date: 2014/06/20	学科:	番号:	名前:
-----	-----------	------------------	-----	-----	-----

- 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< -

1. 次の (a) ~ (b) の各問に答えなさい。

(a) i. 自然対数の底 e の定義を書け。

ii. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\{\log(n+3) - \log n\}$ を求めよ。

iii. 導関数の定義に基づいて、 $x > 0$ のとき、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ である事を示せ。

(b) i. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ を教科書に即して、説明せよ。

ii. 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積 S_n 、外接する正 n 角形の面積 T_n を、それぞれ n の式で表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 及び $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

2. (a) 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ ($0 < x < 2\pi$) の極値を求めよ。

(b) n を自然数とする。関数 $f(x) = e^{-x} \sin nx$ ($0 < x < 2\pi$) の極値の総和を S_n とする時、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

3. 関数 $F(x) = \int_{\pi-x}^{\pi+x} t \sin t dt$ について、次の問に答えよ。ただし、 π は円周率を表すものとする。

(a) 不定積分 $\int t \sin t dt$ を求めよ。

(b) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。

(c) x の範囲を $0 \leq x \leq 2\pi$ とするとき、 $F(x)$ の最小値を求めよ。

4. $f(x) + f'(x) = \frac{4x \sin 2x}{e^x}$, $f(0) = 0$ を満す関数 $f(x)$ について、次の (a) ~ (c) の各問に答えなさい。

(a) $g(x) = e^x f(x)$ とおく。このとき、 $g'(x)$ を求めよ。

(b) $f(x)$ を求めよ。

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k\pi)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明せずにもちいてよい。

5. n, k は自然数とする。このとき、次の (a) ~ (b) の各問に答えなさい。

(a) 定積分 $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\cos nx| dx$ を求めなさい。ただし、答えのみ書きなさい。

(b) 不等式 $\frac{2\pi^3}{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \leq \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} x^3 |\cos nx| dx \leq \frac{2\pi^3}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$ が成り立つ事を示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi x^3 |\cos nx| dx$ を求めなさい。

6. 関数 $f(x) = (x^x - x^2)(1 + \log x)$ について、次の (a) ~ (d) の各問に答えなさい。ただし、 $x > 0$ とする。

(a) $f(x) = 0$ となる x の値を求めなさい。

(b) x^x の導関数を求めなさい。

(c) 不定積分 $\int x^2 \log x dx$ を求めなさい。

得点:

採点者	ID: 微分・積分	Date:	学科:	番号:	名前:
-----	-----------	-------	-----	-----	-----

解答者	ID: 微分・積分	Date: 2014/06/20	学科:	番号:	名前:
-----	-----------	------------------	-----	-----	-----

- 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< -

(d) $x \geq 1$ の時、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ は、 $x = [\text{①}]$ の時、極大値 $[\text{②}]$ をとり、 $x = [\text{③}]$ の時、極小値 $[\text{④}]$ をとる。①~④ に当てはまる数を選びなさい。

①	(1)	-3	(2)	-2	(3)	-1	(4)	0	(5)	1
②	(1)	-3	(2)	0	(3)	2	(4)	7	(5)	9
③	(1)	2	(2)	3	(3)	4	(4)	5	(5)	6
④	(1)	-25	(2)	-20	(3)	-18	(4)	-15	(5)	-9

8. 関数 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 12x - b$ が、 $x = 1$ で、極大値 4 をとるように、定数 a, b の値を求めなさい。また、その時の $f(x)$ の極小値を求めなさい。

9. 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ がある。次の (a) ~ (b) の各問に答えなさい。

(a) 極値をもとめ、グラフの概形を書きなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ とする。

(b) m, n, l を自然数とする。 $m^n \geq n^m, m + n \leq 2l$ を満たす自然数の組 (m, n) の個数を l を用いて表しなさい。

10. 関数 $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ を、導関数の定義に従って、微分しなさい。

11. 次の (a) ~ (b) の各問に答えなさい。

(a) 円 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積は、 $[\text{①}] \pi^2$ である。

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ の値は、 $[\text{②}] \pi^2$ である。

12. 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ について、次の (a) ~ (c) の各問に答えなさい。

(a) $f(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。

(b) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。

(c) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を、 y 軸に近い方から順に、 $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ とするとき、面積の総和 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めよ。

13. $0 < t < 1$ のとき、曲線 $y = \log x$ と 2 直線 $x = t, x = t + 1$ 及び x 軸で囲まれる部分の面積の和を $S(t)$ とする。このとき、次の (a) ~ (c) の各問に答えなさい。

(a) 不定積分 $\int \log x dx$ を求めなさい。

(b) $S(t)$ を t で表しなさい。

(c) $S(t)$ が最小となる時の t の値を求めなさい。

14. x の関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6ax$ は、 $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小となり、極大値と極小値の差が $2(\beta - \alpha)$ に等しい時、 a, α, β の値を求めよ。ただし、 a は定数とする。

					得点:
採点者	ID: 微分・積分	Date:	学科:	番号:	名前:

解答者	ID: 微分・積分	Date: 2014/06/20	学科:	番号:	名前:
-----	-----------	------------------	-----	-----	-----

- 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< - 8< -

15. 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減を調べ、 e^π と π^e の大小を比較しなさい。

					得点:
採点者	ID: 微分・積分	Date:	学科:	番号:	名前: