二次元ベクトルの内積の性質

栗野俊一*

2014 年 10 月 15 日

概要

内積の本質は、垂直成分を取り除き、平行成分の量を取り出す事にある。

平面のベクトルの内積の定義に現れる $\cos\theta$ は、単に、$\theta = 0$ (即ち平行) の時に 1, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (即ち、垂直) の時に 0, になっている性質だけが本質で、その性質だけで、内積の性質が導かれる事を示す。

1 内積

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の成す角を θ とすると、この二つのベクトルの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は、次の様に定義される。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

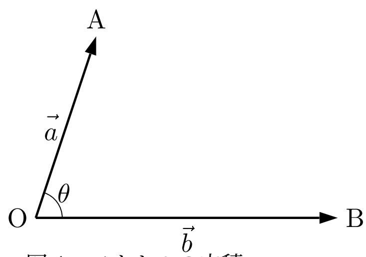

図 1 ベクトルの内積

2 内積の性質

内積の性質である双線形は、内積の本質的な性質[*1] なので、それを示す事にする。

2.1 双線形

k を任意の実数、$\vec{a}, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{b_1}, \vec{b_2},$ を任意のベクトルとする時、次の等式が成立する。これを内積の双線形と呼ぶ。

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$(\vec{a_1}+\vec{a_2})\cdot\vec{b} = (\vec{a_1}\cdot\vec{b}) + (\vec{a_2}\cdot\vec{b}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b_1}+\vec{b_2}) = (\vec{a}\cdot\vec{b_1}) + (\vec{a}\cdot\vec{b_2}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

---

* 日本大学理工学部数学科<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

*1 二次元平面ベクトル空間の基底 $<\vec{b_i}>$ $(i=1,2)$ が与えら、これに対して、双線形と、$\vec{b_i}\cdot^*\vec{b_i} = \delta_{i,j}$ を仮定すれば、これは内積の性質を持つ (証明には基底の変換を行うだけ)。高校で学ぶ「内積」は、この基底に $<(1,0),(0,1)>$(正規直交基底) を選んだ場合に過ぎない。

また、基底の選び方が、この空間に計量 (長さと、角度) を導入している事も注意する。すなわち、「長さ」や、「角度」を、基底 $<\vec{b_i}>$ $(i=1,2)$ をによって決定しても、矛盾は生じない (生まれつき、鏡の世界のように左右が逆に見える目をもっていても、その事に気が付く事はできない)。

この性質は、統計学の因子分析で利用されている。

これと、次の性質 (交換法則) が、ベクトルの内積の性質として、良く利用される。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

2.2 内積の性質の証明

上記で挙げた内積の性質を証明する。ただし、双線形の性質は、直には示す事ができないので、まず、幾つかの補題を示し、それを用いて、線形性を証明する。

2.2.1 交換法則

交換法則は、次の様に示す事ができる。

$\vec{a}, \vec{b}$ を任意のベクトルとし、その成す角度を θ とする。この時、$\vec{b}, \vec{a}$ の成す角が、$-\theta$ になる事を利用すると、

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \\
&= |\vec{b}||\vec{a}| \cos\theta \\
&= |\vec{b}||\vec{a}| \cos(-\theta) \\
&= \vec{b} \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

となる。

この交換法則が成立するので、$\vec{a}$ 側で成立する全ての性質は、$\vec{b}$ 側でも成立する事になるので、以下では、$\vec{a}$ 側だけを議論する。

2.2.2 定数倍

内積が、定数倍を外に出す事は、簡単に示す事ができる。

α を任意の実数、$\vec{a}, \vec{b}$ を任意のベクトル、θ を、この二つのベクトルの成す角とする時、

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\alpha\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \\
&= (\alpha|\vec{a}|)|\vec{b}| \cos\theta \\
&= \alpha(|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta) \\
&= \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}$$

となる。

2.2.3 平行と垂直の場合の内積

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

これは、次のように示される。

$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ ならば、$\theta = 0$ である。従って、$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}||\vec{b}|$ となる。

また、$\vec{a} \perp \vec{b}$ ならば、$\theta = \frac{\pi}{2}$ である。従って、$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$ となる。

また、この事から、$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}, \vec{c} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ ならば、$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{c}$ となるので、$(\vec{a} + \vec{c}) \mathbin{/\!/} \vec{b}$ となる事を利用すると、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{c}) \cdot \vec{b} &= |\vec{a}+\vec{c}||\vec{b}| \cos 0 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{c}|)|\vec{b}| \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{c}||\vec{b}| \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos 0 + |\vec{c}||\vec{b}| \cos 0 \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

と、和を外に出せる。

また、$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{b}$ ならば、$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{c}$ となるので、$(\vec{a} + \vec{c}) \perp \vec{b}$ となる事を利用すると、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{c}) \cdot \vec{b} &= |\vec{a}+\vec{c}||\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} \\ &= 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} + |\vec{c}||\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

と、やはり、和を外に出せる。

2.2.4　平行と垂直のベクトル和との内積

$\vec{a}$ が、$\vec{b}$ に平行な $\vec{a_{/\!/}}$ と、$\vec{b}$ に垂直な $\vec{a_\perp}$ の和で表現できたとする。すなわち、$\vec{a} = \vec{a_{/\!/}} + \vec{a_\perp}$ とする。

この時、右図から、$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = (|\vec{a}| \cos\theta)|\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{b}| = |\vec{a_{/\!/}}||\vec{b}|$ となる事が解る。

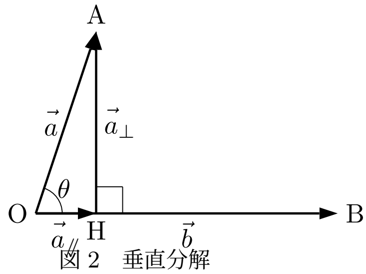

図 2　垂直分解

この事は、形式的に、次のような和が外に出せると見做す事ができる。

$\vec{a}$ が $\vec{b}$ に、平行な $\vec{a_{/\!/}}$ と、垂直な $\vec{a_\perp}$ の和で表現されているとする。この時、次の等式 (和を外に出す) が成り立つ。

$$\begin{aligned}(\vec{a_{/\!/}} + \vec{a_\perp}) \cdot \vec{b} &= \vec{a_{/\!/}} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a_{/\!/}} \cdot \vec{b} + 0 \\ &= \vec{a_{/\!/}} \cdot \vec{b} + \vec{a_\perp} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

2.2.5　互に垂直なベクトル同士の独立性

今、$\vec{a}, \vec{b}$ を、共に $\vec{0}$ でないベクトルとし、互に直交している、すなわち、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とする。この時、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は、独立したベクトルである。

これは次のように、証明できる。

いま、ある実数 α, β を利用して、$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ が成立したと仮定する。

すると、この両辺のそれぞれと $\vec{a}$ との内積を取ると、$\vec{a}$ は $\vec{a}$ 自身と平行であり、また、仮定より、$\vec{b}$ は $\vec{a}$ と垂直なので、$\vec{0} = (\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{b})$ は、$\vec{a}$ に対して、$\vec{0}$ の平行方向と垂直方向への分解になっている。

従って、平行方向と垂直方向への和の性質より、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\
\alpha(\vec{a} \cdot \vec{a}) + \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= 0 \\
\alpha|\vec{a}|^2 + \beta(0) &= 0 \\
\alpha|\vec{a}|^2 &= 0
\end{aligned}$$

ここで、仮定より $\vec{a} \neq \vec{0}$ なので、$|\vec{a}|^2 \neq 0$ である。そこで、両辺を $|\vec{a}|^2$ でわると、

$$\alpha = 0$$

となる。同様に、両辺の $\vec{b}$ との内積をとれば、

$$\beta = 0$$

が得られる。

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ を仮定すると $\alpha = \beta = 0$ が得られたので、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は独立である。

従って、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は、平面ベクトル空間の基底となっている。

2.2.6 垂直なベクトルの存在

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が、共に $\vec{0}$ でなく、かつ、平行でもないとする。

すると、$\vec{a_{/\!/}} = \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ とし、$\vec{a_\perp} = \vec{a} - \vec{a_{/\!/}}$ とすれば、$\vec{a_\perp}$ は、$\vec{0}$ でなく $\vec{b}$ と垂直である。

2.2.7 一般のベクトルの内積の和

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が、共に $\vec{0}$ でなく、かつ平行でもないとする。すると、前節の $\vec{a_\perp}$ が、$\vec{0}$ でなく $\vec{b}$ と垂直である。従って、$\vec{b}$ と $\vec{a_\perp}$ は独立である。よって、任意のベクトル $\vec{c}$ に対し、適当な実数 α_c, β_c が存在し、$\vec{c} = \alpha_c\vec{a_\perp} + \beta_c\vec{b}$ と、この二つのベクトルの線形和で表現できる。もちろん、$\vec{a}$ も $1 \cdot \vec{a_\perp} + \vec{a_{/\!/}} = 1 \cdot \vec{a_\perp} + \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$ となる。

この性質を利用すると、次のようにして、任意の $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ に対して、次のように和を外に出せる事が解る。

先ず、$\vec{e_1} = \vec{a_\perp}, \vec{e_2} = \vec{b}, \alpha_a = 1, \beta_a = \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2}$ と置けば、$\vec{e_1} \perp \vec{b}, \vec{e_2} /\!/ \vec{b}$ となるので、これを利用すると、仮

定より、

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b} &= ((\alpha_a\vec{e_1}+\beta_a\vec{e_2})+(\alpha_c\vec{e_1}+\beta_c\vec{e_2}))\cdot\vec{b} \\
&= (\alpha_a\vec{e_1}+\beta_a\vec{e_2}+\alpha_c\vec{e_1}+\beta_c\vec{e_2})\cdot\vec{b} \\
&= ((\alpha_a\vec{e_1}+\alpha_c\vec{e_1})+(\beta_a\vec{e_2}+\beta_c\vec{e_2}))\cdot\vec{b} \\
&= ((\alpha_a+\alpha_c)\vec{e_1}+(\beta_a+\beta_c)\vec{e_2})\cdot\vec{b} \\
&= ((\alpha_a+\alpha_c)\vec{e_1})\cdot\vec{b}+((\beta_a+\beta_c)\vec{e_2}))\cdot\vec{b} \\
&= 0+((\beta_a+\beta_c)\vec{e_2})\cdot\vec{b} \\
&= (\beta_a\vec{e_2}+\beta_c\vec{e_2})\cdot\vec{b} \\
&= \beta_a\vec{e_2}\cdot\vec{b}+\beta_c\vec{e_2}\cdot\vec{b} \\
&= (0+\beta_a\vec{e_2}\cdot\vec{b})+(0+\beta_c\vec{e_2}\cdot\vec{b}) \\
&= (\alpha_a\vec{e_1}\cdot\vec{b}+\beta_a\vec{e_2}\cdot\vec{b})+(\alpha_c\vec{e_1}\cdot\vec{b}+\beta_c\vec{e_2}\cdot\vec{b}) \\
&= ((\alpha_a\vec{e_1}+\beta_a\vec{e_2})\cdot\vec{b})+((\alpha_c\vec{e_1}+\beta_c\vec{e_2})\cdot\vec{b}) \\
&= (\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{c}\cdot\vec{b})
\end{aligned}
$$

となり、和を外に出せる事が解る。

2.2.8 内積の線形性

以上で、一般のベクトルに対して、定数倍を外に出す事と、和を外に出す事の双方が可能なので、内積は線形性を持つといえる。

3 まとめ

内積の線形性を、内積の定義から導かれる式 6, 式 7 の性質だけを用いて証明した。もちろん、これらの式も $\cos\theta$ の性質から示されるわけであるが、これらの式は、内積を取る二つのベクトルが水平と垂直の場合だけの場合の関係であり、その他の場合の性質は利用していない。

このように、内積の性質は、基準となるベクトル[*2]に対し、垂直な成分を捨て、水平な成分を取り出す事が本質的な性質である事がわかる。

したがって、$\cos\theta$ を使うのではなく、水平、垂直なベクトルに対する内積の値 (式 6, 式 7) と、その場合だけの線形性だけが与えられれば、任意のベクトルに対する線形性が得られる。

[*2] これは内積の計算を行う二つのベクトルのどちらを選択しても構わないので、この稿では、一環して、右側を選んだ。もちろん、交換法則が成立するので、左側を選んでも全く同じ議論ができる。