余弦定理

栗野俊一[*]

2014 年 10 月 10 日

1 余弦定理

右の図 1 の △ABC において、辺 BC, CA, AB の長さを、それぞれ a, b, c とし、∠BAC の大きさを α とする時、次の式 1 の関係を余弦定理と呼ぶ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

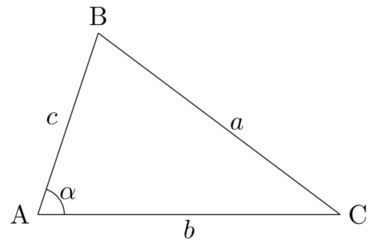

図 1 余弦定理

2 余弦定理の証明

余弦定理の証明を、三平方の定理を用いて示す場合と、ベクトルの内積を用いて示す場合の二つの例を示す。

2.1 三平方の定理を用いる場合

元の図 1 の頂点 B から、底辺 AC に垂線を下し、その足[*1] を H とすると、右の図 (図 2) のようになる。

△ABH は、直角三角形となるので、∠BAH = ∠BAC = α の三角比を用いて、辺 AH, BH を、それぞれ、次のように表す事ができる。

$$\mathrm{AH} = c\cos\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$\mathrm{BH} = c\sin\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

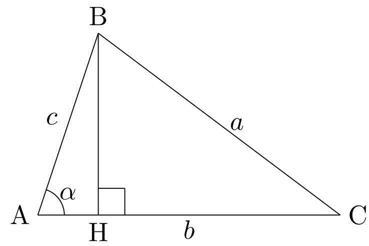

図 2 三平方の定理の利用

一方、△BHC も直角三角形となるので、三平方の定理により、

$$a^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

が成立する。図 2 の関係から、HC = b − AH が成り立つ事を利用して、上記の式 4 を変形すると、次のよう

[*] 日本大学理工学部数学科<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

[*1] 頂点から底辺に引いた垂線と、その底辺との交点を「垂線の足」と呼ぶ。

になる。

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2 \\
&= (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2 \\
&= c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha \\
&= b^2 + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc\cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}
$$

よって、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

すなわち、余弦定理 (式 1) が成立する。

2.2　ベクトルの内積を用いる場合

元の図 1 に対して、右図 3 のように、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を、それぞれ $\vec{b}, \vec{c}$ で表す事にする。すると、図 1 と図 3 の関係から、ベクトルの長さと、辺の長さの間には、次のような関係が成立する。

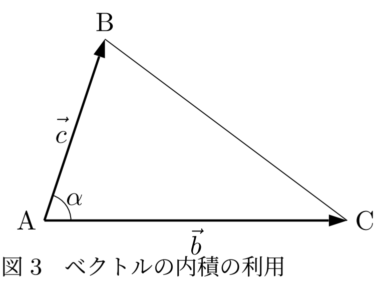

図 3　ベクトルの内積の利用

$$
\begin{aligned}
|\vec{b}| &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \mathrm{AC} = \mathrm{CA} = b \\
|\vec{b} - \vec{c}| &= |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \mathrm{BC} = a \\
|\vec{c}| &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathrm{AB} = c
\end{aligned}
$$

これを利用して、次の様な関係式が導ける。

$$
\begin{aligned}
a^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 \\
&= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\
&= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\
&= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\
&= b^2 + c^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}
$$

よって、式 1 が示された。