図形の極限と計量

— $2 = \sqrt{2}$?? の疑問 —

栗野俊一*

2014 年 11 月 7 日

1　$2 = \sqrt{2}$?? の疑問

右の図 (図 1) では、左下から右上への階段線 S_k の段数が $1, 2, 4, .., 2^k, ..$ 段と、2 倍、2 倍に増えて行く様子を示している。

この段数 (2^k) を無限に増やして行くと、この階段線 (S_k) は、次第に、対角線 (D) に近付いて行くことが見て取れる。

つまり、この階段線 S_k は、「図形として、最終的に対角線 D と一致する」様に思われる。

これを「予想①」と呼ぼう。

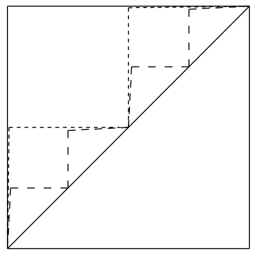

図 1　斜線に近付く階段線

$$\lim_{k\to\infty} S_k = D \text{(階段線は対角線に近付く)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

そして、図形 F の長さを $\phi(F)$ で表すとすれば、一般に「図形が同じならば、長さも同じ (常識②)」なはずである。

$$F_1 \equiv F_2 \Rightarrow \phi(F_1) = \phi(F_2) \text{(同じ図形の長さは同じ)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

すると、上の予想①と、この常識②を組み合わせると、次の「予想③」が浮んでくる。

$$\lim_{k\to\infty} \phi(S_k) = \phi(D) \text{(階段線の長さは対角線の長さに近付く)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

しかし、この正方形の一辺の長さを 1 とするならば、各々の階段線 (S_k) の長さは、階段の段数に無関係に 2 となるし、また、対角線の長さは $\sqrt{2}$ である。

すると、「予想③」が正しいのであれば、これから、次の「結果④」となってしまう。

* 日本大学理工学部数学科<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

$$
\begin{aligned}
\text{階段線 } (S_k) \text{ の長さ} &= \phi(S_k) \\
&= 2 \\
\text{斜線 } (D) \text{ の長さ} &= \phi(D) \\
&= \sqrt{2} \\
&\quad \text{(予想③が成立するなら..)} \\
2 = \lim_{k\to\infty} 2 &= \lim_{k\to\infty} \phi(S_k) = \phi(D) = \sqrt{2} \\
&\quad \text{(即ち)} \\
2 &= \sqrt{2}\,??? \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}
\end{aligned}
$$

これは明らかに、どこかに誤りがあったとしか考えられない。

では、この 予想① から 結果④ 迄の推論の間に、どんな誤りがあったであろうか ?

2　個々の命題の確認

推論の問題点に触れる前に、まずは、個々の命題の内容を確認してみよう。

2.1　「予想①:階段線 (S_k) は対角線 (D) に収束する」か ?

2.1.1　直観:「そのように見える事」の危うさ

元の図 (図 1) を見る限り、確かに「階段線 (S_k) は対角線 (D) に収束する (予想①)」ように見える。しかし、「そのように見えるならば、そうなる」と考えて良いのだろうか ?

右の図 (図 2) は、0.01 に収束する数列 $\left\{a_n = 0.01 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ を、図示した物である。しかし、「この数列は、0.0 に収束する数列の様に見える」気もする。ならば、「この数列は、0.0 に収束する」と考えて良いのだろうか ?

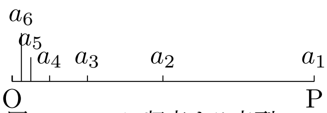

図 2　0.01 に収束する点列

確かに、「0.0 も、0.01 も似たような物」であるかもしれないが、数学的には、これは別物である。

例えば、数列 $\left\{b_n = \dfrac{1}{a_n}\right\}$ を考えてみよう。もし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.01$ であれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 100$ であるが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ なわけで、もちろん、「有限と無限」では大きな違いである。

もし、「階段線 (S_k) は対角線 (D) に収束する (予想①)」を主張するのであれば、きちんと、その事を厳密に表現し、数学的に証明すべきである。

2.1.2　「同じ図形」とは ?

二つの「図形が同じである」という事はどうゆうことなのだろうか ? これは、一般に、次のように定義すればよさそうである。

「図形」とは「点」の集合である (「点」は、座標で表現される) $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

そして、もちろん、「図形が等しい」という事は「(その図形を作る点の) 集合が等しい」と考えてよいだろう。

さて、ここで、対角線 (D) 並びに、階段線 (S_k) を、この集合の言葉で表現してみよう。

$$\text{対角線 } D = \{(x,x)|x \in [0,1]\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$\text{階段線 } S_k = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} (V_i^k \cup H_i^k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$\left(\text{ただし } V_i^k = \left\{ \left(\frac{i}{2^k}, y\right) \middle| y \in \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right] \right\},\ H_i^k = \left\{ \left(x, \frac{i}{2^k}\right) \middle| x \in \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right] \right\}\right)$$

この定義から、次のような事が解る。

$$D \cap S_k = \left\{ (x,x) \middle| x = \frac{i}{2^k}\ (i = 0, 1, .., 2^k) \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

この事から、確かに段数 (2^k) が増えれば、共通する (重なる) 点 $\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$ $(i = 0, 1, .., 2^k)$ は増えて行く事が解る。しかし、D には、$P_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ の様に無理数を座標に持つような点も存在するが、$D \cap S_k$ には、そのような点は含まれない (座標に現れるのは有理数のみである)。

即ち、$P_{\frac{\pi}{4}} \in D$ であるが、$P_{\frac{\pi}{4}} \notin S_k$ であるので、次の結果⑨が得られる。

S_k が、図形 (点の集合) として、D に一致する事はない $\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑨

2.1.3 各点収束

「ちょっと待って、結果⑨っていっても、積分の時に、この階段線で、対角線を近似しているじゃないか ???」

確かに、右の図 (図 3) の様に、底辺と右辺と対角線 (直線 $y = x$) で囲まれた図形の面積を、複数の長方形の和で近似するという事が行われている。

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

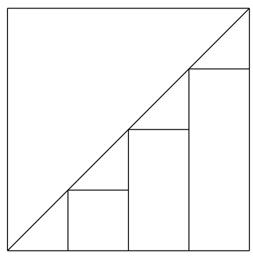

図 3　$y = x$ の積分の近似

そして、図形 G の面積を $\psi(G)$ で表すとすれば、一般に「図形が同じならば、面積も同じ (常識⑪)」だから、結果⑩が成立するのではなかったのか ??

$$G_1 \equiv G_2 \Rightarrow \psi(G_1) = \psi(G_2)\ \text{(同じ図形の面積は同じ)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

もちろん、これは間違っている。確かに、「図形が等しければ、面積が等しい (常識⑪)」は正しいが、逆、すなわち「面積が等しいからといって図形が等しい」わけではない。

この積分の例でも、「図形は異るが、面積は一致する」事が示され[*1] れば問題はない。

[*1] もちろん、示す事 (一致の証明) ができる。

ただ、確かに、集合として一致しない (結果⑨) としても、D と S_k の間には何らかの関係 (「同じ」にならないとしても何か「近くなる」といった..) があると考えられる。

実際、次のような事を考えてみると、確かに S_k が、ある意味で D に近くなる事が示される。

まず、二つの図形 S_k, D を、共に、次の様な形でパラメータ表記 (定義 12) する。

$$S_k = \{(x_k(t), y_k(t))\,|t \in [0,1]\,\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$
$$D = \{(x(t), y(t))\,|t \in [0,1]\,\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

すると、関数 $x(t), y(t), x_k(t), y_k(t)$ を上手く取る[*2] 事により、次の事が言える。

$$\forall t \in [0,1] \lim_{k\to\infty}(x_k(t), y_k(t)) = (x(t), y(t)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑭$$

すなわち、D の任意の点 (x,y) に対して、S_k 上の点 $(x_k(t), y_k(t))$ が対応し、点列 $\{(x_k(t), y_k(t))\}\,(k = 0, 1, ..)$ が、元の点 $(x(t), y(t))$ に収束する (各点収束) ようにできる。

2.1.4 改めて「階段線 (S_k) は対角線 (D) に収束」するか ?

これまでの結果をまとめると、S_k は、D に一致はしない (結果⑨) が、各点収束 (結果⑭) はする事が解った。

つまり、ある観点[*3] で、「収束する (予想①が成立する)」事は解った。つまり、ある意味、「直観は正しかった」といえるだろう。

しかし、逆に、「一致はしていない」わけで、この「収束」と「一致」との違いを考えて行こう。

2.2 「常識②:同じ図形の長さは同じ」か ?

そもそも、「同じ図形の長さは同じ常識②」に疑問を持つ事自身が変かもしれないが、しかし、前節でも、明らかになったように、「直観的に正しく感じるからといって、実際に正しいとは限らない」わけであるから、この常識も確認すべきであろう。

実際に、「長さ」は「図形の属性」なのだから、「図形が同じならば、その属性も等しいはずだ」は、動かし難い事実として受け入れてもよいだろう。

[*2] 例えば、対角線 D 上の点を、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

とし、その対角線上のそれぞれの点 $(x(t), y(t)) = (t, t)$ に対して、その点を通り、傾き -1 の直線を引く。そして、その直線と、階段線 S_k の交点の座標が $(x_k(t), y_k(t))$ となるように、関数 $x_k(t), y_k(t)$ をそれぞれ、次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \frac{2i}{2^{k+1}} \\ 2t - \frac{2i}{2^{k+1}} \end{pmatrix} & \left(t \in \left[\frac{2i}{2^{k+1}}, \frac{2i+1}{2^{k+1}}\right]\right) \\ \begin{pmatrix} 2t - \frac{2i+1}{2^{k+1}} \\ \frac{2(i+1)}{2^{k+1}} \end{pmatrix} & \left(t \in \left[\frac{2i+1}{2^{k+1}}, \frac{2(i+1)}{2^{k+1}}\right]\right) \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, .., 2^k - 1)$$

すると、このパラメータ表示において、結果⑭が成立する。

[*3] 「各点収束」という考え方を導入する事によって、初めて「『収束する』と言えるようになった」事に注意しよう。

逆の言い方をすれば、「このような定義を導入しない」と、「収束する等とはいえない」わけで、「直観的に、収束するような気がする」では駄目なわけである。

しかし、ここで、注意したいのは、この推論の「仮定」すなわち、「長さが図形の属性」なのか ? 更に言うならば、「全ての『図形』に『長さ』が決る」のか ? という疑問である。

例えば、「半径が 1cm の球」の「長さ」とはなんだろうか ? 「そんな事は無意味な問いだ」と決め付ける事はできる。

しかし、では、「二つの『半径が 1cm の球の長さ』は等しいか ?」という疑問には、どう答えるのだろうか ? 「同じ図形の長さは同じ (常識②)」を無条件に認めるのであれば、当然、「二つの『半径が 1cm の球の長さ』は等しいか ?」という問には、「はい」と答えなければならないだろう。「『半径が 1cm の球の長さ』には意味がない」にも拘わらずである。

これは、流石に不毛な議論であろう。

つまり、正確 には「その図形に属性としての長さが定義されており、それが求める事ができた」場合に、「同じ図形の長さは同じ (常識②)」と主張しなければならないわけである。

つまり、(前節で、「同じ図形」、「収束する」を定義しないと、明確な議論ができなかったのと同様に..) 「長さを定義するという作業」なしに、「同じ図形の長さは同じ (常識②)」という主張の真偽の検討もできないわけである。

そこで、ここでは、一般的に採用されている長さの定義 [1] を、次のように導入する事にしよう。

今、図形 S_k が、パラメータ表記 (定義 12) されているとしよう。

そして、図形 S_k の長さを、次のように定義 (定義 15) する。

$$\phi(S_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{\left(x_k\left(\frac{j+1}{n}\right)-x_k\left(\frac{j}{n}\right)\right)^2+\left(y_k\left(\frac{j+1}{n}\right)-y_k\left(\frac{j}{n}\right)\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ⑮$$

すなわち、図形 S_k 上に、$n+1$ 個の点列を取り、この点列の隣り合う二点間の距離を求め、その総和を計算すると、その点列を結ぶ折線の長さを得る事ができる。

点列の個数 $n+1$ を無限に大きくし、点列間の距離が小くすると、この折線の長さは、曲線 S_k の長さに次第に近付く事が解る。

この定義に従って、S_k, D のそれぞれの長さを求めると、これは、直観と等しく、それぞれ、2 と $\sqrt{2}$ となる事が解る。

また、この定義に従って、図形に長さがある事が解れば、「長さが等しいかどうか」も議論できるようになる。

2.3 「予想③:階段線の長さは対角線の長さに近付く」か ?

2.3.1 「近付く」と「同じ」は「近い」が「同じ」でない

図形 S_k が、ある意味で、D に近付く事は解った。また、S_k にも D にも長さがあり、それを比較する (同じかどうかを考える) 事に意味がある事も解った。

では、改めて、考えよう。「予想③:階段線の長さは対角線の長さに近付く」のだろうか ?

ここで注意すべき事は、「図形が近付く」という事と「長さが近付く」という事は、別であるという事だ。

前節で述べたように長さは、図形の属性である。そして、ある図形列がある図形に収束した時に、その図形列が持つ性質や属性が、収束によっても破壊されず、保存され、収束した図形に引き継がれるかどうかは、自明ではない。

例えば、数列 $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ を考えてみよう。この数列の要素 a_n は、任意の n に対して、正であるという性

質 $(a_n > 0)$ が成り立つ。

その一方、この数列は明らかに 0 に収束する ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) 。しかし、もちろん、収束先の 0 に対しては $0 \not> 0$ となり、この正であるという性質は成り立たず、極限操作によって失われてしまう。

すなわち、極限操作によって、元々の列の全ての要素が保持していた性質であっても、それが、収束先でも保存されるという保証はなく、寧ろ、一般には失われると考えた方がよい。

そして、長さという属性も然りである。確かに S_k の長さは、全ての k について 2 であるが、$\lim_{n\to\infty} S_k$ の長さが 2 であるという保証は何もない[*4] 。

したがって、もし、「これが 2 である事を示したい」のであれば、それ (は、自動的には成り立たないのであるのだから、それ) を明示的に示す必要がある。

2.3.2 S_k の長さと D の長さの比較

さて、では何が起きているかを考えてみよう。ここで、示したい事は、

$$
\begin{aligned}
S_k \text{ の長さの極限} &= D \text{ の長さ} \\
\lim_{k\to\infty} \phi(S_k) &= \phi(D) \\
\lim_{k\to\infty} \phi(S_k) &= \phi\left(\lim_{k\to\infty} S_k\right)
\end{aligned}
$$

である。この式から、明確化された事は、この示したい事は、「極限処理」と「長さを取る処理」が交換可能である事を意味する事である。

一方、「長さを取る」という操作自身も極限処理である。即ち、「二つの極限処理を交換できるか」という問題に帰着する。もちろん、これも一般的には成り立たない。例えば、

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m}\right) &= \lim_{m\to\infty}\infty \\
&= \infty \\
\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}\right) &= \lim_{m\to\infty} 0 \\
&= 0 \\
\text{よって、} \\
\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m}\right) &\neq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}\right)
\end{aligned}
$$

である。

*4 「ある性質が極限操作によって失われない」という状況は、大変望ましい状況である。何故ならば、もし、「それが成り立つ」のであれば、「その性質を持つ特定な要素を指定するのに、その要素を直接指定 する代りに、その要素に収束する要素列で指定しても構わない」からである。これは、「その特定な要素が直接指定しにくい (例えば、問題の答えのようにその正体が明確でなく、これから求める場合) 場合に、他の形で表す事ができる」事を意味するからである。

そして、今回の場合も、

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\phi(S_k) &= \lim_{k\to\infty} 2 \\
&= 2 \\
\phi\left(\lim_{k\to\infty} S_k\right) &= \phi(D) \\
&= \sqrt{2} \\
\text{よって、} & \\
\lim_{k\to\infty}\phi(S_k) &\neq \phi\left(\lim_{k\to\infty} S_k\right) \\
\text{即ち、} & \\
\lim_{k\to\infty}\phi(S_k) &\neq \phi(D)\,(S_k \text{ の長さは } D \text{ の長さに近付かない})
\end{aligned}
$$

という、よくある (極限操作が交換できないという..) 普通の結果が単に得られるだけである。

3　まとめ：推論の誤り

3.1　推論に失敗した直接の原因

結論から言えば、もちろん、結果④ は誤りであり、その直接の原因は、予想③を正しいと考えた所にある。しかし、予想①や、常識②も、それ自身は成り立つのだが、それ程自明ではなかった。

3.2　誤りの原因

では、なぜ、誤った推論をしてしまったのであろうか？

この本質は、やはり、(論理を蔑ろにし)直観に頼りすぎてしまった という事ではないだろうか？

予想③を「直観的に正しいと思い込む」事によって、その誤った結果が、推論の中に紛れ込み、結論を誤りに誘導するように思われる。

3.3　「直観」の功罪

「直観」は、「論理」なしに一足飛びに、結論を導く素晴しい能力である。これなくしては、「数学」はやって行けない。しかし、その一方、論理の裏付けがないが故に、時に誤りを導く危うい能力でもある。したがって、「直観」で得られた結果を、「論理」によって確認 (し、最終的には、論理ののみで説明) するという手順 (=証明) が数学には不可欠なのである。

参考文献

[1] http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%A7%E9%95%B7